別冊・数理科学

1999年 4 月

場の理論

サイエンス社

別冊・数理科学 目次

場の理論

I．序章

II．素粒子物理と場

III．物性物理と場

Ⅳ. くりこみ群

Ⅴ. 重力場の量子論

別冊号「場の理論」は，「数理科学」誌に掲載された論文によって再編集されております．初出掲載号は下記の通りです．今回の編集にあたりまして，初出論文に従いましたが，新原稿および増補と訂正を加えたものがありますことをおことわりいたします．

数理科学編集部

初出一覧

〈=〉は原題名，(　)は発行年月号

ゲージ理論への道	西島　和彦	('95.10)
素粒子の古くて新しい統一模型　**テクニカラー理論の再生**	山脇　幸一	('89. 6)
複合模型におけるヒグスボソン	山脇　幸一	('95.10)
格子 QCD	岩崎　洋一	('95.10)
超対称理論でのヒッグス粒子	坂井　典佑	('95.10)
量子論とトポロジー	筒井　　泉	('95.10)
ゲージ場のトポロジーとアノマリー	藤原　高徳	('91.11)
$N=2$ 超対称Yang-Mills理論とSeiberg-Witten方程式	伊藤　克司	('95.10)
非可換幾何とゲージ理論	森田　克貞	(新　規)
物性物理におけるゲージ場理論 〈=物性物理におけるゲージ理論〉	青木　秀夫	('97. 2)
(2+1)次元時空上の場の理論とトポロジー	松山　豊樹	('91.11)
量子ホール効果とトポロジカル不変量	石川　健三	('91.11)
ベリーの位相	青木　秀夫	('91.11)
くりこみ群と普遍性	田崎　晴明	('97. 4)
非摂動論的くりこみ群　**素粒子の質量の謎に迫る**	青木　健一	('97. 4)
場の量子論とくりこみ理論入門	東島　　清	('97. 4)
重力場の量子化	湯川　哲之	('95.10)
重力理論とトポロジー	藤原　義久・細谷　暁夫	('91.11)
量子重力と弦理論	川合　　光	('97. 4)
超弦理論とトポロジー	米谷　民明	('91.11)
ブラックホールのエントロピー	細道　和夫	('98. 2)
ミラー対称性	細野　　忍	('95.10)
デュアリティーとM理論	太田　信義	(新　規)

I. 序章

ゲージ理論への道 ——— 西島　和彦

I. 序章

ゲージ理論への道

西島　和彦

1. はじめに

場の理論に基づいた素粒子論は誕生以来既に半世紀以上も経過している．出発したばかりの頃と現在とを比較すると正に今昔の感がある．この間，多くの研究者はあるいは大きな波に乗り，あるいは小さな波に乗り，うまく波に乗って岸に辿着く者もあり，また途中で沈んでしまった者もある．大きな波に乗って最後まで達するのはなかなか努力の要ることである．素粒子論にとって最も大きな波に相当するのは「ゲージ理論」であろう．

日本における素粒子論は，湯川・朝永・坂田などの諸学派が活躍した時代に始まり，大勢としてかつて内山の提唱した「ゲージ原理」に基づいた理論にだんだん収束しつつあるように思われる．勿論，世界の大勢も同様である．そこでゲージ理論を中心として素粒子論発展の経緯について記そう．

はじめ編集部より，素粒子論を志す若い人々のためのノウハウについて書いたらどうかとの提案をいただいたが，既に他の人の使用したノウハウというものは大抵古くなって役に立たないし，また素粒子論の現状について書くには私はどうやら古すぎる人間になってしまったようである．したがってこの稿では，私がいままで見聞してきた「ゲージ理論の誕生から現在に到るまで」の印象について書くことをお許し願いたい．

名人と言われる仏師が仏像を彫刻するということは，木片の中に隠れている仏像をただあるがままに彫り出すだけであるという話を聞く．素粒子論におけるゲージ理論の発展の歴史もそれと良く似ていて，多くの実験的事実や理論的考察により素粒子論に添削を施したら何時の間にかゲージ理論が姿を現してきたと言うことができる．勿論，ゲージ原理が確立されるまでには多くの紆余曲折を経てきていることは言うまでもない．

2. 対称性とゲージ原理

数学・物理学における不変性の概念の果たす役割の重要性は，いくら強調しても強調し過ぎることはない．数学においては，古くは1872年のフェリックス・クライン(Felix Klein)のエルランゲン・プログラムが知られている．これはクラインがエルランゲン大学の教授に就任したときの論文であるが，彼は幾何学を変換群という概念の下に総合しようとした．ある空間に変換群が与えられたときにその空間の部分集合である図形の性質のうちでこの変換群の変換で不変なものを研究するという立場から幾何学を把握したのである．

物理学においては，保存則と変換群との間に深い対応関係が見いだされる．種々の保存則は運動方程式の結果として導出されるが，保存則は与えられた力学系に潜む不変性あるいは対称性の必然

的結果であるという認識に達したのは，抽象代数学の専門家であったエンミー・ネーター(Emmy Noether)の 1918 年の研究においてであった．これによって力学系における保存則の研究は，この保存則に対応する不変性あるいは対称性の研究に帰着されることが明らかになった．この理論は，古典物理学のみならず量子化された場の理論に対しても適用できる極めて有用なものであった．またこの理論の立場は，与えられた力学系，特に相互作用をする場に対して，もしある種の不変性が偶然発見されれば，それに対応する保存則が存在するというものであった．それに対して 1956 年に内山龍雄先生の提唱した「ゲージ原理」は，ある意味で全く逆の立場であった．すなわち保存則，あるいはそれに対応する変換群に対する不変性が与えられれば，それによってその系の相互作用の形が決定されてしまうという画期的な仮説であった．これは対称性が力学を決定すると換言することもできる．したがって，それまでの勝手に相互作用を導入する現象論的場の理論を根底から覆す革命的な達見であった．

この理論を簡単に紹介すると，何らかの保存量あるいはその密度を源とするゲージ場を基本的場とするもので，この理論においてはすべての相互作用はゲージ場を媒介して導入されることになる．

この原理は極めて抽象的に表現されるが，実は具体的な問題に適用してみると豊富な内容を持っていることに気が付く．先ず素粒子を物質の構成要素であるフェルミ粒子と相互作用を媒介するゲージ場とに分類する．対称性を指定する変換群を与えるとこの群がゲージ場のラグランジアンを決定してしまう．この群をゲージ群と呼ぶ．次に物質を構成するフェルミ粒子は，ゲージ群の一つの既約表現を指定するとそれに対応する多重項として現れ，表示を指定すればそのゲージ場との相互作用が一意的に決定されてしまう．

かつてリー(T. D. Lee)とヤン(C. N. Yang)とはバリオン数の保存について考察したことがある．バリオン数とは核子数の一般化であり，物質の安定性を説明するために通常中性子と陽子の数の和，すなわち核子数は保存されると仮定される．そこでゲージ原理に従って核子数の保存に対応するゲージ場について考察してみよう．電荷の保存則に対応するゲージ場は電磁場であり，クーロン力を媒介する．したがって上記のゲージ場は，二物体間に核子数の積に比例したクーロン斥力型の力を導入することになる．核子数はマクロの物質の質量に近似的に比例するが，厳密には比例せず，そのずれは重力の法則からのずれという形になるであろう．しかしながらエートヴェーシュ(Eötvös)の実験によれば，かなりの精度でずれの存在は否定されることになり，このような力の存在は考え難い．

そこでゲージ原理によればバリオン数の保存は成立しないことになり，例えば一番軽いバリオンである陽子が，レプトンに崩壊することになる．例えば，$p \to e^+ + \pi^0$ というような崩壊が可能となる．この考察はビッグバンで始ったと考えられる宇宙において現在核子数が反核子数よりもはるかに大きいという事実と矛盾しない．

また電磁的相互作用と弱い相互作用とを統一するゲージ理論において，素粒子の電荷 Q，弱アイソスピン I_i $(i=1,2,3)$，弱超荷電 Y という保存量の間に $Q = e\left(I_3 + \frac{Y}{2}\right)$ という関係式が成立する．そこでそれぞれに対してゲージ場が導入されることになるが，この三種のゲージ場はこの関係式のために独立ではない．そこでどのゲージ場の量子が観測されるかは興味のある問題である．後述の対称性の自発的破れがなければ，保存量の任意の一次結合に対応する量子が存在するであろう．例えば，電磁場の場合の直線偏光と円偏光とはお互いに他の一次結合となっているが，何れも観測可能である．現実には，対称性の自発的破れのために，ゲージ場の量子の一部が質量を持ち，一定の質量を持った量子，すなわち質量の固有状態のみが観測されることになる．その結果，中性のゲージ場量子としては光子 γ と質量が有限な Z とが観測されることになる．このように保存量

があれば必ずそれに対応する量子が存在するというのが内山のゲージ原理の結果である．

3．対称性の自発的破れ

前節において対称性の自発的破れという概念に触れたが，これもミクロの世界において初めて現れたものである．ネーターの定理はもともと古典力学において定式化されたものであり，ラグランジアンがある種の対称性を持てばその対称性は運動方程式に投影されることになる．ところが量子力学において古典的な物理量に対応するものは期待値であり，それはその物理量を表す演算子と状態ベクトル，あるいは確率振幅を用いて表される．この物理量の従う運動方程式自身は古典力学のときと同様に対称性を内蔵しているが，問題となるのは状態ベクトル，特に基底状態に対応する真空状態である．この真空が対称性に対応する変換群に対して全く中立の状態，あるいは不変な状態ならば良いが，そうでないことがある．そのときに生ずる現象が対称性の自発的破れである．これは一般に基底状態が縮退しているときに生じる．場の理論においては無限自由度の結果として縮退している状態間の遷移が不可能となってしまうのでどうしてもその中の一つの状態を真空として選び，その上に理論を建設しなければならない．

古典力学にも似たような例は多数存在する．そこで一つの典型的な例を考えてみよう．地球表面に平面を設定する．この平面上では東西南北すべての方向が同等で，物理法則はこの平面内での回転に対して不変であるとする．次に真上から針をこの平面上に垂直に落としてみよう．勿論地磁気などはないものとする．針が地平面にまで落ちるとどうなるであろうか？　回転対称性を尊重すればそのまま直立している外はないが，極めて不安定である．現実には必ずどちらかの方向に倒れて回転対称性を破ることになる．古典力学の例としては，倒れた針を動かして他の方向に向けることもできるが，無限自由度の場の理論においてはこのような遷移は無限回の操作を必要とするので不可能であり，どうしても特別な方向が固定されてしまう．

話は抽象的になったが，このような対称性の自発的破れが生ずるとゲージ場の量子が質量を持つことが可能となる．場の理論において特定の方向に倒れる針の役目を果たすものとしてヒッグス(Higgs)場という場を導入することが多い．また対称性の自発的破れという概念は，古くは強磁性との関連でハイゼンベルク(W. Heisenberg)，超伝導や素粒子の質量との関連で南部陽一郎などの諸先生方により導入されている．そして実はこの自発的破れがミクロの世界とマクロの世界とを区別する最も特徴的な性質であることは次の考察により明らかにされる．

このことを明確にするために，古典物理学から素粒子論に進むまでに我々が遭遇した種々の相互作用について想起してみよう．古典力学においては色々なポテンシャルが導入されるが，はっきりと起源の判明しているのは重力と電磁的な力である．この二種の力の特徴は，力の強さが距離の二乗に反比例するという逆二乗法則に従うことである．更に，重力は二物体の質量の積，クーロン力は電荷の積に比例する．電荷は勿論，質量もニュートン力学の範囲内では保存量である．そしてこのような力は正に典型的なゲージ力である．すなわち内山のゲージ原理によれば，電荷という保存量があればそれを源とするゲージ場——この場合には電磁場——が存在し，質量——あるいはもっと正確にはエネルギー・運動量——という保存量に対してはそれを源とするゲージ場としての重力場が存在することになる．これは後に明らかにされたことであるが，逆二乗法則はゲージ場の量子の質量がゼロのときに限って成り立つものであり，もし質量が有限であれば力の到達距離が有限，それも原子核半径程度以下になってしまうのでマクロの世界を対象とする古典物理学においてはこのような力の存在は認識されていなかったのである．更に，ゲージ場の量子が質量を持つのはゲージ対称性が自発的に破れていることが原因である

から，結果として自発的破れの有無がミクロとマクロの世界を区別すると言える．そこで我々は意識していなかったにせよ，物理学は古典物理学の時代からゲージ原理に支配されていたということができる．

4．現象論的場の理論からゲージ理論まで

素粒子論は元来場の理論という理論形式の上に建設されているが，場の理論自身は相対論と量子力学を融合したもので相対論的量子力学とも呼ばれる．しかしながら具体的に問題となることは，どのような素粒子が存在し，その間にどのような相互作用が働いているかということである．

さて翻って過去を思い出すと，先ず電子と電磁場との相互作用を研究する量子電磁力学――以下QEDと略記――があり，次にフェルミ(Fermi)によるベーター崩壊の理論や湯川の中間子論などに代表される歴史的，あるいは古典的素粒子論がある．この中でQEDは精密科学の代表選手として現在でも生き残っている．それには，現在でも電子は素粒子であると考えられており，電磁的相互作用も典型的なゲージ相互作用であるという二重の幸運に恵まれていたという事情があるからである．それに反してベーター崩壊に対するフェルミ型相互作用や，中間子と核子間の湯川型相互作用は，現在では現象論的相互作用，あるいは有効相互作用と見做され，基本的ゲージ相互作用とは区別されている．更に核子も中間子も現在のクォーク模型によれば複合粒子であって素粒子とは考えられていない．

しかしながら素粒子論の初期においてはこのような現象論が主流であったので理論と実験とは直結しており，その間の関係は密接であった．この頃の素粒子論研究者の社会は，手から口へ，あるいは生産者と消費者とが直結していた原始的経済社会に擬えることができる．ところが加速器の発達に伴って強い相互作用を持つハドロンが何百と見付かるようになると，もはやすべてのハドロンを素粒子と見做すことはできなくなり，素粒子のリストラが始った．本当に素粒子らしい素粒子を求めてフェルミ・ヤン模型や坂田模型が提出され，更にクォーク模型が出現するに及び，すべてのハドロンは複合粒子であると信ぜられるに到った．

こうして手から口への現象論時代は終り，実験と理論とを比較するためには中間で複合粒子，あるいは束縛状態の問題を解くという面倒な手続きが必要となり，現在の日本における複雑な流通機構に似たような状態に達した．その結果として，理論は比較的実験に近いB粒子物理のようなものとストリングのように高度に抽象的なものとの間の分業を促進する傾向を示し始めている．

他方，場の理論の定式化自身も多くの変革を経験してきている．戦後のことに限っても，先ずくりこみ理論に基づいたQEDは，戦前には到底考えられなかったような大成功を収め，場の理論に対して全幅の信頼を与えることとなった．先ずゲージ理論の最初の例を与え，くりこみ可能性という理論選択のための重要な基準を導入することになった．フェルミ型相互作用に疑念が持たれるようになったのもこれがきっかけであった．ところが戦後，パイ中間子の実験的研究が隆盛を極めるようになると，再び場の理論に対する不信の時代が到来する．パイ中間子に対する現象論的場の理論が成功しなかったことには少くとも二つの理由がある．一つには，それが現象論であって正しい模型ではなかったこと，そしてもう一つはQEDとは異って強い相互作用の理論であったために摂動論が無意味であったことが挙げられる．実際に，パイ中間子と核子間の相互作用定数が，QEDにおける1/137に対して約15という大きな値となるという結果は，多くの理論家を悲観させるのに十分であった．この結果は多くの理論家を安全主義へと駆り立てた．先づ保存則，あるいは対称性を利用することにより近似によらない関係式を導くことができる．初期には荷電独立性に基づいた$SU(2)$群，そしてその後池田峰夫，小川修三，大貫義郎氏らにより坂田模型に導入された$SU(3)$群，そしてそれを抽象化したゲルマン(Gell-

Mann)やネーマン(Neeman)の八道説などがそれである．当時はゲージ原理が普及する以前であったので，これらの対称性は力学とは独立な仮定として導入された．しかしながら場の理論の立場からもっと重要であったのは分散理論の導入であった．

朝永・シュビンガー(Schwinger)・ファインマン(Feynman)・ダイソン(Dyson)らによるくりこみ理論では，ファインマン図形毎に振幅を計算し，それぞれから発散を引算するという処法を用いていたので，摂動論以外の近似でくりこみをすることができなかった．またQEDではゲージ不変性を維持するような計算法として摂動論以外のものは知られていなかった．そこに現れたのが分散関係式であった．すなわち散乱振幅のような S 行列要素や形状因子などをエネルギーなどの力学変数の複素関数として取扱い，それに対してコーシーの積分公式を適用したものが分散関係式で，因果律に基づいて導出されたものである．これは通常振幅の実部(分散部分)が虚部(吸収部分)を含む積分という形に表されるので分散公式と呼ばれる．また虚部は S 行列のユニタリー性より，他の振幅の積の形に表される．この積分は発散することがあるが，引算をした形の分散公式を導入することにより発散を避けることができる．分散関係式の重要な性質は，必要ならば引算をした形の分散関係式を採用することにより，計算の途中の過程ではどこにも発散が現れないことである．そして引算をした形の分散関係式を書くということは，実はくりこみをすることに対応する．

また分散関係式，ユニタリー性と引算条件とを与えれば一つの力学系となり，振幅を決めることができる．かつてこのような分散理論と対称性とを組合せるという枠組理論が流行した時代があった．このような理論は安全第一の立場に立った保守的なものであるが，当然限界がある．すなわち枠組しか与えられていないからこれらの関係を満たす理論が一意的には決定されないのである．このような過渡的理論は，摂動論以外の近似でくりこみをしたりゲージ不変性を維持したりすることには成功したが，肝心の相互作用が指定されていないという理由で研究者にとって満足できるものではなかった．この不満が我々を場の理論のルネッサンスに導いたのである．

そこで粧いを新にして復活してきたのはゲージ原理に基づいた場の理論であった．その歴史は良く知られているから省略するが，電磁的および弱い相互作用がワインバーク(Weinberg)とサラム(Salam)により統一され，更に強い相互作用を記述する量子色力学——QCDと略記——が導入されると，ゲージ理論にとって最も記念すべき発見があった．それはグロス・ウィルツェック(Gross-Wilczek)やポリッツァー(Politzer)による漸近的自由性の発見である．これは簡単に言えば，近距離において，あるいは高エネルギーにおいて相互作用が弱くなるという性質であり，非可換群に基づいたゲージ理論に特有な性質である．実はそれ以前に，現象論的なビョルケン(Bjorken)スケール則という法則が電子の核子による深非弾性散乱を説明するために導入されていた．この法則を説明するためにファインマンはパートン模型を導入したが，そのうちこの性質は漸近的自由性そのものであるということが認識されるようになり，非可換ゲージ理論を発掘する端緒となったのである．

また場の理論の立場からは，漸近的自由な場以外はトリビアルである，すなわち相互作用を導入できないという予想もある．そうなると非可換群に基づいたゲージ理論のみが将来生き残れる理論となり，内山のゲージ原理を強力に支持することになる．このように現象論から出発した場の理論は試行錯誤を繰り返しながらゲージ理論に収束しつつある．

以上において対称性が自発的に破れない場合にのみゲージ場は逆二乗法則に従う力を与え，それがマクロの世界に現れると述べた．しかしながら実は重大な例外がある．強い相互作用を媒介する場は，クォークを結び付けてハドロンを形成する膠の役目をするので，その量子は膠子，あるいはグルーオンと呼ばれる．この膠子は質量がゼロで

あるが，マクロの世界に出現する力は与えない．何故であろうか？　QCD において保存される量子数をカラーと呼ぶ．ただしカラーは現実の色とは無関係である．カラーを持った粒子同志には逆二乗法則が成り立ち，力の到達距離はミクロの世界からはみ出し，マクロの世界で感知される筈ではないだろうか？　現実にはこのような力は発見されていない．その理由は，カラーを持ったクォークは単独では観測にかからず，カラーが全体として打消されるようなハドロンのみが観測されるからである．したがってハドロン同士に働く力は，ちょうど電気的に中性な粒子同士に働くファン・デル・ワールス力のように逆二乗法則には従わない力となり，ミクロの世界でしか働かないことになる．このような事情を「クォークの閉じ込め」と呼ぶ．更にグルーオンも含め，カラーを持ったすべての粒子はカラーが全体として打消すような組合せのハドロンという束縛状態でしか観測にかからないという仮説を「カラーの閉じ込め」と呼ぶ．これは明らかに「クォークの閉じ込め」の一般化である．このような性質は，自発的に破れていない非可換ゲージ理論に特有なものと考えられている．以上では述べなかったが，QCD を支配する対称性は非可換群 $SU(3)$ と呼ばれる群で表される．

このようにして，仏師が木片から仏像を彫り出すように現象論的素粒子論という木片からゲージ理論という仏像が彫り出されたと言うことができよう．

（にしじま・かずひこ）

別冊・数理科学

素粒子
物質の究極像を求めて

本体 1857 円　送料 310 円　表示価格は税抜きです

サイエンス社

II．素粒子物理と場

II．素粒子物理と場

素粒子の古くて新しい統一模型

テクニカラー理論の再生

山脇　幸一

1．質量はいずこより来る？ ──ヒグスボソンの謎

現在のところ物質の最も基本的な構成要素である素粒子（クォークおよびレプトン）を記述する理論としては，強い相互作用に対して **QCD**（**Qu**antum **C**hromo**d**ynamics；量子色力学），弱い相互作用と電磁相互作用の統一的記述にはグラショウ・サラム・ワインバーグ(**GSW**)模型があり，これらは“標準模型”と総称されて，重力相互作用を除く素粒子のすべての相互作用の理論として実験との一致は驚くほどよい．にもかかわらず素粒子物理学者の多くはそれを越えるより基本的な統一理論の建設を目指して様々な試みを重ねてきた．

その最大の理由は，GSW 模型における質量の生成機構にある．ゲージ理論である GSW 模型では，弱・電磁相互作用を媒介するゲージボソンの質量は**ゲージ対称性**の要請から 0 であり，またクォーク・レプトンの質量もこのゲージ対称性が**カイラル対称性**（左巻き成分と右巻き成分を独立に変換させる“カイラル変換”のもとでの不変性）でもあることから同様に 0 である．現実世界ではもちろん弱い相互作用を媒介する W ボソン・Z ボソンは大きな（$\simeq 100$ GeV；GeV$=10^9$ eV）*) 質量を持っており，クォーク・レプトンも多様な質量スペクトルを示している．そこで GSW 模型の枠組でこれらに質量を与えるには，このゲージ対称性を現実世界では破らなければならない．

一般に，系の本来持つ対称性（“運動方程式”の対称性）が物理的状態の対称性（“解”の対称性）として素直に現れない現象は，固体物理学や統計物理学で**相転移**と呼ばれるごくありふれた現象であるが，場の量子論ではこれをとくに**対称性の自発的破れ**と呼んでいる．自発的に破れた対称性が場の連続変換のもとでの系の不変性である場合，この対称性が物理的状態に現出しない代償として，スカラー（スピン 0）の零質量ボース粒子（**南部・ゴールドストン**（**NG**）**ボソン**）が現れる（ゴールドストンの定理）．ところがこの対称性がゲージ対称性である場合には，上の NG ボソンは横波 2 成分から成るスピン 1 の零質量のゲージボソンと合体して（ゲージボソンに“食われて”），スピン 1 で質量のあるベクトルボソン（横波 2 成分，縦波 1 成分を持つ）の縦波成分に化けるのである．これが**ヒグス機構**と呼ばれているゲージ対称性の自発的破れであって，GSW 模型における質量生成の核心に他ならない．GSW 模型の場合には，3 種の W^+, W^-, Z^0 ボソンの質量生成のために 3 種の NG ボソンが必要である．

では一体このヒグス機構の種──NG ボソン──はどこから供給されるのだろうか．これがここでの問題である．

これに対し GSW 模型では，**ヒグス系**の力学を用いる．すなわち，ゲージ変換のもとでレプトン

*）以後自然単位系 $\hbar=c=1$ を用いる．

と同様に振る舞うスカラーボソン(ヒグスボソン)場 $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi^0(x)\\ \phi^-(x)\end{pmatrix}$ を導入し，その中性成分 ϕ^0 の実部（ϕ^0, ϕ^- は複素数．ϕ は実数で4成分である）に真空期待値

$$\langle \mathrm{Re}\,\phi^0\rangle = v = 250\,\mathrm{GeV}$$

を持たせるように $\phi(x)$ のポテンシャル $V(\phi)$ をアドホックに設定する．すなわち，

$$V(\phi)=\lambda\left(|\phi|^2-\frac{v^2}{2}\right)^2, \qquad (1)$$

ただし，$|\phi|^2\equiv(|\phi^0|^2+|\phi^-|^2)/2,\quad \lambda>0$.

実際，ポテンシャル(1)を簡単のため $\mathrm{Re}\phi^0$, $\mathrm{Im}\phi^0$ の軸だけで図示すると，図1のようなワインボトルの形となり，エネルギーの基底状態(真空)，$V(\phi)=0$, の点は $|\phi|^2=v^2$ のボトル底の縁(へり)（破線）に沿って無限に縮退している．一般に場 φ の質量項 $V(\varphi)\sim\frac{m^2}{2}\varphi^2$ に対応して（質量)^2 はポテンシャルの基底状態での曲率 $\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$ で与えられるので，ボトル底の縁に沿う平らな方向(図1では1方向だが実際は3方向ある）の3成分はすべて零質量(NGボソン)であり，それらに直交する1方向の成分のみが質量を得る．いまボトル底の縁上の1つの点 $\mathrm{Re}\phi^0=v$, $\mathrm{Im}\phi^0=\mathrm{Re}\phi^-=\mathrm{Im}\phi^-=0$ をとると $\langle\mathrm{Re}\phi^0\rangle=v$ が対称性の自発的な破れすなわち相転移を測る**秩序パラメータ**となり，$\mathrm{Re}\phi^0$ の方向のみは質量を得るが，$\mathrm{Im}\phi^0$, $\mathrm{Re}\phi^-$, $\mathrm{Im}\phi^-$ の3成分はいずれも零質量のNGボソンとなることがわかる．

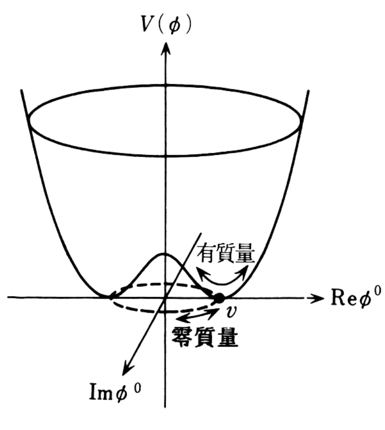


図1　ポテンシャル(1)の図．
ただし $\mathrm{Re}\phi^0$ と $\mathrm{Im}\phi^0$ のみで図示．

そこで上のヒグス機構により，たしかに $W^\pm$, Z^0 ボソンは質量 $m_{\mathrm{W,Z}}\sim v$（比例係数はゲージ結合定数)$=O(100\,\mathrm{GeV})$ を得るとともに，カイラルなゲージ対称性が破れたことにより，クォーク・レプトンも質量 $m_{\mathrm{f}}\propto v$ を獲得できることになる(比例係数はクォーク・レプトンの種類毎に異なる ϕ との相互作用の強さ（湯川結合定数）である)．

ところが，残念なことにこのようなスカラーボソンの力学では，

$$\langle \mathrm{Re}\,\phi^0\rangle = v = 250\,\mathrm{GeV}$$

に対する量子補正がこの理論の適用領域のエネルギースケールとともに急激に増大する．このため適用領域を250 GeVより遙かに大きくとりつつ，量子補正を加えた後にもなお $\langle\mathrm{Re}\,\phi^0\rangle=250$ GeVを保とうとすると，非常な精度での相殺を実現せねばならずそのため理論のパラメータ間の**不自然な精密調整**を強いられるはめになる（"自然さ"問題)．さらに，クォーク・レプトンの質量 m_{f} など，ヒグス系にまつわるパラメータは，GSW模型の枠内では**原理的に計算不可能**な任意パラメータであり，この数の多さもGSW模型を微視的(基本的）理論とは考えにくい所以である（"計算可能性"問題)．実際，ヒグスボソンに関わるこれらの問題こそは，標準模型を越えようとする現代のあらゆる統一模型の試みがその超克をめざして展開してきた問題そのものに他ならない．

2．複合ヒグスボソン："カラー"から"テクニカラー"へ

上の"困難"はそもそもGSW模型が250 GeVを大きく越えてまで正しい微視的理論であるとしたことに由来する．そこでもしGSW模型のヒグス系，とりわけヒグス機構の引金となる3個のNGボソンが，より基本的な理論における複合粒子でありポテンシャル(1)はその**複合粒子レベルの巨視的理論**にすぎないとするとどうだろう．

実際このような例は，クォークとグルーオン(クォーク間の強い相互作用を媒介するゲージボソン）の力学QCDにおけるクォーク(q)・反クォーク($\bar{q}$)対の束縛状態であるπ中間子に見ることができる．π中間子を構成するクォークは近似的に零質量であり，これに対応してQCDには(近似的な）**カイラル対称性**が存在する．実際にはこのカイラル対称性はQCDの力学の結果自発的に破れており，これに伴う(近似的)NGボソンが実は3つの荷電状態のπ中間子(π^+, π^-, π^0)なのである（現実のπ中間子はクォークの小さな質量——カイラル対称性の小さな破れ——のため質量を持ち，厳密な意味でのNGボソンではないが，いまこれはあまり重要なことではない)．カイラル相転移の場合の秩序パラメータは“複合場”$\bar{q}q$の真空期待値$\langle\bar{q}q\rangle$（$\bar{q}q$対凝縮と呼ぶ）であり，前の$\langle \mathrm{Re}\,\phi^0\rangle$とは違って元々存在した場そのものの凝縮でないので，このようなことが可能になるには非摂動的な力学的効果が本質的でなければならない（このような自発的破れをとくに対称性の“力学的破れ”ということがある)．QCDの固有のエネルギースケールをΛ_{QCD}（$\simeq$100 MeV；MeV $= 10^6$ eV）とすると$\langle\bar{q}q\rangle = O(\Lambda_{\mathrm{QCD}}^3)$である．

一方，この複合π中間子のNGボソンとしての性質は，あたかもこれを“素”粒子であるかのように扱う理論——**シグマ模型**——で完璧に記述されることがわかっている．このように低エネルギー（巨視的）領域で元の微視的理論と等価な物理的内容を持つ理論を**“低エネルギー有効理論”**と呼ぶ．QCDにおける$\langle\bar{q}q\rangle$に対して，その低エネルギー有効理論であるシグマ模型ではスカラーボソンσの真空期待値$\langle\sigma\rangle = f_\pi = 93$ MeVが秩序パラメータとなる(f_πはπ中間子の崩壊定数と呼ばれる量である．$f_\pi = O(\Lambda_{\mathrm{QCD}})$)．これは丁度超伝導の微視的理論BCS（バーディーン・クーパー・シュリーファー）理論におけるクーパー対の代わりに，その巨視的（現象論的）理論であるギンツブルグ・ランダウ理論で現象論的な秩序パラメータφ(ギャップ)が果した役割と同様である（ちなみに素粒子論における対称性の自発的破れの概念はBCS理論における相転移との類推に基づいて南部が導入したものである)．より具体的には，シグマ模型のポテンシャル$V(\vec{\pi}, \sigma)$は(1)と同様の形

$$V(\vec{\pi}, \sigma) = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2)^2 \qquad (2)$$

をとる（ただし今度は$v = f_\pi = 93$ MeVになる．また，$\vec{\pi}^2 \equiv \pi^{+2} + \pi^{-2} + \pi^{02} = \pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2$．$\pi^\pm \equiv (\pi_1 \pm i\pi_2)/\sqrt{2}$，$\pi^0 \equiv \pi_3$)．

ところがこのシグマ模型はヒグス系の力学にとって実は単なる類推以上のものである．実際，

$$\phi^0 \equiv \sigma + i\pi_3,\ \ \phi^- \equiv -\pi_2 + i\pi_1$$

とおくと，これはヒグス場と同じ変換性を持ち，さらに(2)は(1)と全く同じものになる（唯一の違いは$v = 250$ GeVに対して$v = 93$ MeVとなっている点だけである)．ポテンシャルのみならず運動エネルギーの部分も上の置き換えで**ヒグス系とシグマ模型は全く等価**なものになる．

そこで，シグマ模型がQCDの低エネルギー有効理論であったと同様に，GSW模型のヒグス系もQCDと似た“より基本的な”（微視的）理論の低エネルギー有効理論と考えるのが自然ではあるまいか．これが副題の**テクニカラー理論**(technicolor-**TC**と略記）である（QCDが“カラー(chrom)”の力学であったのをもじってテクニカラーと呼んでいる)[1]．QCDのクォーク，グルーオンに対応してそれぞれ**テクニ**フェルミオン(F)，**テクニ**グルーオンを考える．$\langle\bar{q}q\rangle = O(\Lambda_{\mathrm{QCD}}^3)$に対応して$F$と$\bar{F}$の対凝縮$\langle\bar{F}F\rangle = O(\Lambda_{\mathrm{TC}}^3)$がTCにおけるカイラル対称性の秩序パラメータである．上のϕとπとの対応からわかるように，(W^+, W^-, Z^0)ボソンに質量を与えるのは(π^+, π^-, π^0)と類似のTCにおける複合NGボソンに他ならない．これらの崩壊定数F_πはπ中間子のそれ($f_\pi = 93$ MeV)と違って$F_\pi = 250$ GeVととらねばならない．すなわちTCの固有のエネルギースケールΛ_{TC}はQCDの約2600倍であり($\Lambda_{\mathrm{TC}} \simeq 2600\Lambda_{\mathrm{QCD}}$)，質量次元を持つすべての物理量はこれに従って単純にスケールアップするものと期待される．以上を図式化すると図2のように

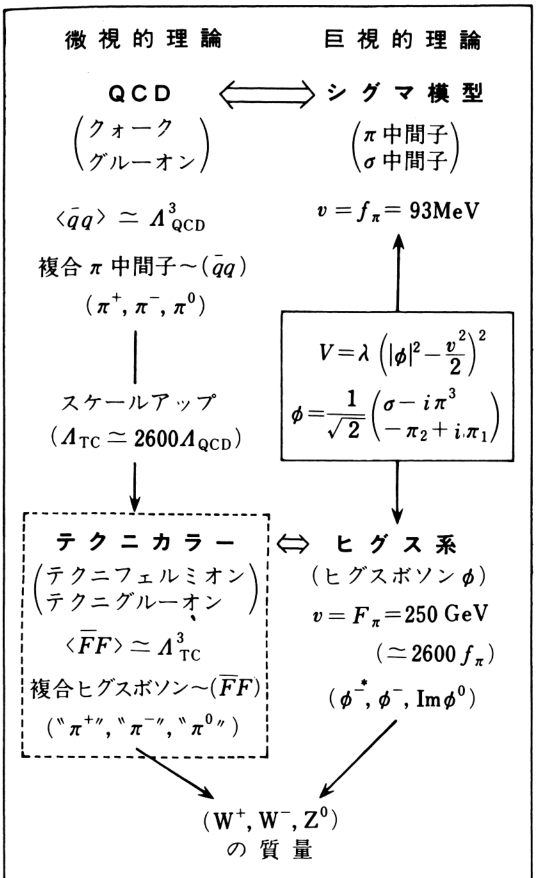


図 2

なる．

3．死に至る病——FCNC

不幸にして上のアイデアはW•Zボソンの質量の起源を説明するのには成功したものの，最初に提起したもう一方の質量の問題すなわちクォーク・レプトンの質量 m_f の大きさをも説明しようとすると，実験値の上限を約3けた上回る **FCNC** (**F**lavor-**C**hanging **N**eutral **C**urrent)*) を予言し

*) フレーヴァー（世代）の異なる素粒子間の電気的に中性の（電荷が同じ者同志の）遷移のことで，典型的には電荷 $-1/3$ を持った第1，2世代のクォーク d, s の間の遷移としての K^0 中間子と $\bar{K}^0$ 中間子の混合現象がある．標準模型では GIM（グラショウ・イリオポウロス・マイアニ）機構によって小さく抑えられて実験によく合うが，それを“越える”統一模型では TC に限らず一般に余分な FCNC が出てしまうので，これを抑えることが模型構築の試金石となる．

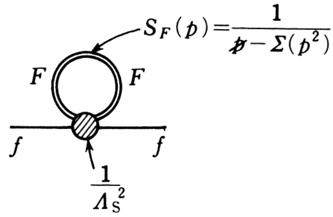


図3

てしまう[1]．“テクニカラーは死んだ”という伝説が広く流布した所以である．

実際，クォーク・レプトンの質量 m_f はスケール Λ_S ($\gg \Lambda_{\mathrm{TC}}$) をも持った“拡張された TC” (ETC) を通じて*)

$$m_f \sim \frac{1}{\Lambda_S^2} \int_{\Lambda_{\mathrm{TC}}^2}^{\Lambda_S^2} dp^2 \frac{p^2 \Sigma(p^2)}{p^2 + \Sigma(p^2)^2} \qquad (3)$$

のように与えられる(図3)．ここに $\Sigma(p^2)$ はカイラル対称性が自発的に破れたことにより生成したテクニフェルミオンの**“力学的質量”** ($\propto \langle \bar{F}F \rangle$) である（フルの伝播関数 $S_F(p)$ は $S_F^{-1}(p) = \not{p} - \Sigma(p^2)$ と表される)．一般にカイラル対称性が自発的に破れると，対称性に対応していた零質量フェルミオンはこの物理的状態においては零質量に止まる理由を失なって力学的質量を得る．力学的質量もまたカイラル相転移の秩序パラメータに他ならない．

さて QCD の単純スケールアップとしての TC では，そのゲージ相互作用の特徴である**漸近自由性**（p の漸近領域（“高エネルギー極限”）で相互作用のない自由場理論に近づく性質）により，$\Sigma(p^2)$ の漸近領域 ($p \gg \Lambda_{\mathrm{TC}}$) での振舞いは，ほぼ単純な（自由場理論の）次元解析で与えられる（$\bar{F}F$ 次元3に対して $\Sigma(p^2)$ のそれは p と同じく1)，

$$\Sigma(p^2) \sim \langle \bar{F}F \rangle / p^2 \sim \Lambda_{\mathrm{TC}}^3 / p^2. \qquad (4)$$

(4)を(3)に代入すると本質的な部分は

$$m_f \sim \Lambda_{\mathrm{TC}}^3 / \Lambda_S^2 \qquad (5)$$

となる．困難の元凶はこの(5)式である．

先ず，FCNC を実験値内に抑えるには $\Lambda_S \gtrsim$ 350 TeV（TeV = 10^{12} eV）ととらねばならない．

*) 以下4元運動量はすべてユークリッド化されたものを使う．$p^2 = \sum_{\mu=1}^{4} p_\mu^2$.

ところが $\Lambda_{\rm TC} = O(F_\pi)$ なので(5)より $m_{\rm f} \lesssim 0.1$ MeV となってしまう．これをクォーク質量の典型的な値 $m_{\rm f} \simeq 100$ MeV と比べると約3けた小さくなり，逆に $m_{\rm f}$ の方を合わせると FCNC が実験の制限より3けた大きくなるのである．

4．復活その前夜——異常次元の効能[2)]

ところが，上の QCD 的な漸近自由 TC の代わりに，**非漸近自由かつ非零の紫外固定点**(nontrivial ultraviolet fixed point) のある TC をとると，上の事情は一変する[3)]．一般に相互作用の強さを表す結合定数 α の実効的な強さは物理的なプロセスの運動量 p 毎に変わり，この変化の度合は β 関数 $\left(\beta(\alpha)=p\dfrac{\partial\alpha(p)}{\partial p}\right)$ で表される．それぞれの場合に β 関数およびゲージ結合定数の p 依存性は図4(a)および図4(b)のようになる（ただし後者では紫外固定点 $\alpha=\alpha^*$ より大きなゲージ結合定数 $\alpha(p)$ の領域 (**強結合相**) での p 依存性のみ示した)．前者と違って今度は $p\to\infty$ でも残るゲージ相互作用 $\alpha(p)\to\alpha^*+0$ のために素朴な次元解析が成立せず，量子効果のために生じた**異常次元** γ_m (>0) により複合場 $\bar{F}F$ の物理的な次元は $d=3-\gamma_m$ となる．したがって(4)は

$$\Sigma(p^2) \sim \Lambda_{\rm TC}\cdot(\Lambda_{\rm TC}/p)^{d-1}$$
$$\sim (\Lambda_{\rm TC}^3/p^2)(p/\Lambda_{\rm TC})^{\gamma_m} \qquad (6)$$

と変わり，これを(3)に代入すると問題の(5)式も変わって

$$m_{\rm f} \sim (\Lambda_{\rm TC}^3/\Lambda_{\rm S}^2)(\Lambda_{\rm S}/\Lambda_{\rm TC})^{\gamma_m} \qquad (7)$$

となる．すなわち異常次元 γ_m による増幅因子を稼ぐのである．もし $\gamma_m \gtrsim 1$ ならばこの増幅因子は3けた以上となり，FCNC 問題は解消する[3)]．これをホルドム機構と呼ぶことがある．

では一体，図4(b)のような非零紫外固定点のあるゲージ理論は存在するのだろうか．またもしあったとしても $\gamma_m \gtrsim 1$ の可能性はあるのだろうか．これに対する回答なしには，せっかくの妙案も絵に画いた餅である．実はこのような場の理論

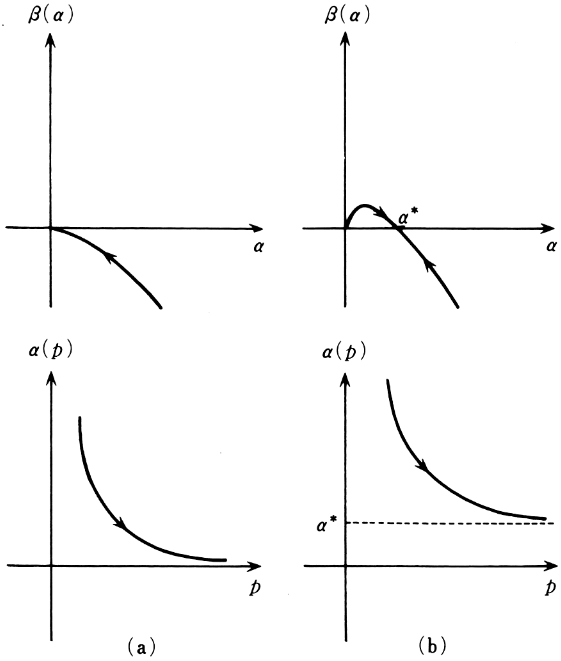


図4 (a)漸近自由の場合の β 関数(上)とゲージ結合定数の p 依存性（下） 矢印は $p^{\prime}$ の方向．
(b)非漸近自由で非零紫外固定点 $\alpha=\alpha^*$ のある場合の β 関数(上)とゲージ結合定数の p 依存性(下) 矢印は $p^{\prime}$ の方向．図から $\alpha(p)$ は $p\to\infty$ (“紫外”極限)で $\alpha(p)\to\alpha^*+0$ に“固定”されることがわかる．

はないというのが相場になっていたのである．実際，このアイディアは人々の注目をひくことなく久しく埋もれたままになっていた．

5．復活——強結合ゲージ理論の新展開[2)]

ところが驚くべきことに，このような力学的模型は存在した! 実際，**強結合 QED**(量子電気力学 (QED) で結合定数を $\alpha \gg 1/137$ としたもの) などの非漸近自由のゲージ理論では，$\Sigma(p^2)$ に対する**はしご近似のシュウィンガー・ダイソン(SD)方程式**(ハートレー・フォック近似のギャップ方程式) の枠内で，まさしく上記非零紫外固定点が存在し，しかも $\gamma_m=1$ となることによって，これを TC に用いた場合，上記 FCNC 問題を一挙に解決することが判明したのである[4)]（実質的に同様のことは

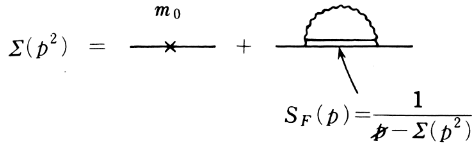


図 5 QED のはしご SD 方程式．波線は“光子”の裸の伝播関数，頂点も裸，二重線は電子のフルの伝播関数 $S_F(p)$．

概念的に少し違った形でも論じられた[5])．(6)，(7)で $\gamma_m=1$ とおくと，(4)，(5)の代わりに

$$\Sigma(p^2) \sim \Lambda_{\rm TC}^2/p \qquad (8)$$

$$m_{\rm f} \sim \Lambda_{\rm TC}^2/\Lambda_S \qquad (9)$$

となるわけである．例として QED におけるはしご近似[*)]の SD 方程式(図 5)を見よう．これは

$$\Sigma(p^2)=m_0+\frac{3\alpha}{4\pi}\int_0^{\Lambda^2}dq^2\frac{\Sigma(q^2)}{q^2+\Sigma(q^2)^2}\times\left[\frac{q^2}{p^2}\theta(p^2-q^2)+\theta(q^2-p^2)\right], \qquad (10)$$

となる．m_0 はフェルミオン(“電子”)の裸の質量である．この近似の根拠は必ずしも明らかではないが，ともかく無限個のファインマングラフの足し上げを行なっている点で非摂動的効果をとり入れていることは確かである（有限個の摂動では自発的破れは起こらない)．(10)は紫外切断 Λ を入れた形ではじめてカイラル対称性の自発的破れの解（$m_0(\Lambda)=0$ で $\Sigma(p^2)\neq 0$ の解）と**臨界結合定数** $\alpha_c\,(=\pi/3)$ の存在が示された[6),7)]（強結合相 $\alpha>\alpha_c$ が自発的破れの相)．これを見るには(10)を微分方程式と赤外（IR）および紫外（UV）境界条件（BC）とに直した方がよい[7)]：

$$(x\Sigma(x))''+\frac{3\alpha}{4\pi}\frac{\Sigma(x)}{x+\Sigma(x)^2}=0, \qquad (11)$$

$$\lim_{x\to 0}x^2\Sigma'(x)=0, \quad \text{(IRBC)} \qquad (12)$$

$$(x\Sigma(x))'|_{x=\Lambda^2}=m_0(\Lambda), \quad \text{(UVBC)} \qquad (13)$$

ただし，$x\equiv p^2$, $\Sigma'(x)\equiv\dfrac{d}{dx}\Sigma(x)$.

(11)の漸近解（$x\gg\Sigma(x)^2$ なので分母の非線形項を無視）は簡単に得られて

$$\Sigma(p^2)\sim\frac{\Sigma(0)^2}{p}\times\begin{cases}\dfrac{1}{2\gamma'}\sinh\left[2\gamma'\left(\ln\dfrac{p}{\Sigma(0)}+\delta\right)\right] & (\alpha<\alpha_c) \qquad (14)\\[2ex] \ln\dfrac{p}{\Sigma(0)}+\delta & (\alpha=\alpha_c) \qquad (15)\\[2ex] \dfrac{1}{2\gamma}\sin\left[2\gamma\left(\ln\dfrac{p}{\Sigma(0)}+\delta\right)\right] & (\alpha>\alpha_c). \qquad (16)\end{cases}$$

ここで $\gamma'\equiv\dfrac{1}{2}\sqrt{1-\alpha/\alpha_c}\equiv i\gamma$, δ は α に依存した定数である．(14)は $\Sigma(p^2)\sim p^{-1+2\gamma'}$ の漸近形を持っているので，$m_0(\Lambda)=0$ の場合の(13)を満たせないのは明らかである．すなわち自発的破れの解ではない．(15)も同様である．したがって $\alpha\leq\alpha_c$ では自発的破れの解は存在しない．ところが $\alpha>\alpha_c$ での(16)は振動解であるため，$m_0(\Lambda)=0$ の場合の(13)を次の条件で満たすことができる，

$$2\gamma\left(\ln\frac{\Lambda}{\Sigma(0)}+\delta\right)+\tan^{-1}2\gamma=n\pi \quad (n\geq 1), \qquad (17)$$

($n=1$ が基底状態)，すなわち自発的破れの解が存在する．$\Lambda\gg\Sigma(0)$ ($\gamma\simeq 0$) のとき(17)を書き換えると（以下 $n=1$ をとる)，

$$\Sigma(0)=e^{\delta+1}\Lambda e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\alpha/\alpha_c-1}}}, \qquad (18)$$

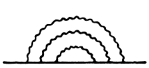
となり，$\alpha\to\alpha_c$ の極限でなめらかに $\Sigma(0)/\Lambda\to 0$ となる．すなわち $\alpha=\alpha_c$ は **2 次の相転移点**である．

さて，これが我々の本当に関心ある $\Lambda\to\infty$ で意味のある解であるためには $\lim_{\Lambda\to\infty}\Sigma(0)<\infty$ でなければならない（$\Sigma(0)$ は $\Lambda_{\rm TC}$ に対応する量である)．これは一つの**くりこみの処法**を与え α の Λ 依存性を(17)（もしくは(18)）を通して決めたことになる[7),8)]：

$$\frac{\alpha(\Lambda)}{\alpha_c}=1+\frac{\pi^2}{[\ln(e^{\delta+1}\Lambda/\Sigma(0))]^2}\,. \qquad (19)$$

$$(\delta \xrightarrow[\Lambda\to\infty]{} 0.714)$$

---

*）“はしご”の名の由来は，この積分方程式を展開すると， の形のグラフを無限個足し上げていることになるからである（この図ははしごの絵  の片方の端を閉じたものと同じである)．

この(19)における α の Λ 依存性 $(\alpha(\Lambda) \xrightarrow[\Lambda\to\infty]{} \alpha_c)$ からミランスキーは $\alpha=\alpha_c$ を非零紫外固定点と同定した[8]．実際 β 関数，$\beta(\alpha)\equiv\Lambda\frac{\partial\alpha(\Lambda)}{\partial\Lambda}$，を求めると，

$$\beta(\alpha)=0\,(\alpha\leq\alpha_c),\ -\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\alpha_c}-1\right)^{3/2}\quad(\alpha>\alpha_c)$$ [9]

となってたしかに図3（b）の $\alpha>\alpha_c=\alpha^*$（強結合相）の部分を実現している．

一方，異常次元 $\gamma_m\equiv-\frac{\partial}{\partial\ln\Lambda}\ln m_0(\Lambda)$ を求めるには(16)，(17)を(13)に代入して $m_0(\Lambda)\sim 1/\Lambda$．これより

$$\gamma_m=1 \tag{20}$$

を得る[4]．望み通り $\Sigma(p^2)\sim\Lambda_{\rm TC}^2/p$ の答（8）を得たのである．（$\Lambda\to\infty$ での $\Sigma(p^2)$ の漸近形を(16)，(17)から直接求めると

$$\Sigma(p^2)\sim(\Sigma(0)^2/p)(\ln(p/\Sigma(0))+\delta)$$

となって[8]，対数因子を除いて（8）と一致する．）

以上のようにはしご近似のQEDの強結合相は $\gamma_m=1$ のTCの具体的な力学的模型であることがわかった．QED以外の**非**漸近自由な非アーベルゲージ理論でも，はしご近似を使う限りは非零紫外固定点の存在と $\gamma_m=1$ の結果は変わらない．この模型の **$\gamma_m=1$ は力学の結果であって何ら精密調整を要しない**点も強調しておきたい．

かくしてTCは大きな異常次元 $\gamma_m=1$ によって蘇った．しかしながら何分にもはしご近似という粗い近似に基づくものであるだけに，この結果が近似の制約をのがれてどこまで普遍性のあるものか大変興味のあるところである．実際，上記のTCにおける仕事が契機になって，従来アカデミックな問題にしか過ぎないと思われていたQEDにおける非零紫外固定点の存在（もっと一般的には，そもそも意味のあるQEDが数学的に厳密に構成できるかどうかまで含めた，非摂動論的な相構造の解明）がにわかにクローズアップされてきた．“強結合ゲージ理論の新展開”を迎えたのである*)．

まず，理論的に最も信頼できると思われている格子ゲージ理論によるアプローチでは，最近スーパーコンピュータを用いたモンテカルロ法による大規模コンピュータシミュレーションがQEDにおける非零紫外固定点の存在などはしご近似の結果の特徴を再現して注目を集めた[10]．一方，SD方程式の枠組でも近似の改良が行なわれ，quenched近似（真空偏極のグラフを無視する近似）の結果[11]と真空偏極をとり入れた結果[12]とが発表され，これまた基本的にはしご近似の結果を支持するものであった．

それでもなお非零紫外固定点の存在に懐疑的な人々の間では，上の $\gamma_m=1$ のTCと同様の効果を漸近自由ゲージ理論の枠内で保証しようという試み（“walking” TC）[13]がもてはやされている．これは漸近自由の場合でもrunning結合定数（図4（a））がゆっくり変化する（“walking”）場合には，（3）の積分に寄与する $\Sigma(p^2)$ の主要部分が上と同じ(10)のはしごSD方程式の解，$\Sigma(p^2)\sim\Lambda_{\rm TC}^2/p$，で記述されるというものである．しかしながら解析的・数値的の両面にわたって詳しい分析の結果，walkingの度合が元々主張された程度[13]ではFCNCの解決にはなりえないことが判明した[14]．FCNCの解決のためにはwalking TCでも $\Lambda_{\rm TC}<p<\Lambda_{\rm S}$ の全領域にわたって $\gamma_m=1$ のTCに限りなく近い状況を設定しなければならないのである．これは結局非零紫外固定点の理論と同じである**)．

6．大異常次元への誘(いざな)い——結びにかえて

以上をかえりみれば，そもそもTCはヒグス系とシグマ模型との類似性（図2）に着目して，QCD

---

*）最新の詳しい情報は，次の会議録に網羅されている：Proceedings of 1988 International Workshop on New Trends in Strong Coupling Gauge Theories, Nagoya, August 24-27, 1988, edited by M. Bando, T. Muta and K. Yamawaki (World Scientific Co. Pte. Ltd, Singapore, 1989)

**）その後，文献4)，5)と文献13)とを総称して $\gamma_m\approx1$ のTCを“walking TC”と呼ぶことが一般的になった．

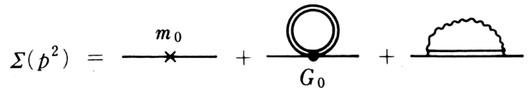


図6　QED プラス 4 体フェルミ相互作用のはしご SD 方程式.

に対応するヒグス系の下部ゲージ理論を想定したものであるが，上の類似性はあくまで低エネルギー領域（有効理論）のそれでしかないのであって，微視的理論が全面的に展開する高エネルギー領域では QCD と TC とは全く様相を異にしていても構わないのである．大きな異常次元 $\gamma_m = 1$ を持つ TC の存在はまさにそれを端的に物語る．QCD における対称性の破れの力学的起源が赤外（長距離）領域にあるのに比して，$\gamma_m = 1$ のそれは見かけの類似性にもかかわらず本質的には紫外切断 Λ の近くの紫外（近距離）領域にあるのである．この後者の力学的特質を最も鮮やかに示すのはいわゆる "Decoupling Theorem" [15] の破れ[16]である．例えば短距離領域での僅かな対称性の（あらわな）破れもこの力学では一般に $O(1)$ の強さで低エネルギー領域に現象する．

これに関連して，ごく最近**さらに大きな異常次元** $(2 > \gamma_m > 1)$ を持つ力学系の性質が明らかにされた[17),18),19),20)]．その力学系は QED に 4 体フェルミ相互作用

$$(G_0/2)[(\bar{\psi}\psi)^2-(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2] \qquad (21)$$

を加えたはしご近似の SD 方程式[9)]（図 6）であるが，$m_0 = 0$ の場合に，最近その解の全体と 2 つの無次元結合定数 $(\lambda, g) \equiv (3\alpha/4\pi,\ G_0\Lambda^2/4\pi^2)$ の平面上でのカイラル相転移の**臨界曲線**（図 7）が発見された[17)]．臨界曲線は (18) における臨界点 $\alpha = \alpha_c$ と同様，$\Sigma(0)/\Lambda \to 0$ となる 2 次相転移点 (λ, g) の組であり，カイラル対称性が自発的に破れた領域と破れない領域を分かつ曲線である：

$$g = \frac{1}{4}(1+\sqrt{1-\lambda/\lambda_c})^2 \quad (\lambda \le \lambda_c = 1/4)\,;$$
$$\lambda = \lambda_c \quad (g < 1/4)$$

驚いたことに，臨界曲線に近づく（$\Lambda/\Sigma(0) \to$

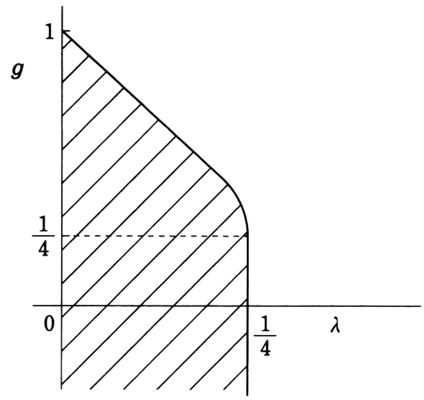


図7　太線が臨界曲線．斜線部はカイラル対称性の自発的破れのない $(\Sigma(0)/\Lambda = 0)$ 領域である．

∞）と，異常次元は

$$\gamma_m = 1+\sqrt{1-\lambda/\lambda_c} \quad (0 < \lambda < \lambda_c) \qquad (22)$$

となって $\lambda \to 0$*⁾では $\gamma_m \to 2$ となる[18)]．$\gamma_m \simeq 2$ はフェルミオンの複合場 $\bar{\psi}\psi$ の物理的次元が $d = 3-\gamma_m \simeq 1$ になることを意味し，これは"素"なヒグス場の次元と同じである．このような場合の自発的破れの力学は $\gamma_m = 1$ のときと比べても遙かに短距離力であり，"複合"粒子か"素"粒子かの区別は力学的性質のみを見るかぎり実際上はつかなくなる可能性がある．ただし，本稿の最初に提起した"素"なヒグス系の問題（自然さ問題）は，紫外固定点の存在により"力学的"に解決されるところがミソである．これは場の理論における新しい状況であり今後さらに詳しい分析が必要であろう．

この大きな異常次元を持った新しい力学系を TC に適用するのももちろん面白いが，それとは違って最近我々はテクニフェルミオンの代わりに t（トップ）クォークと b（ボトム）クォークの組を用いる模型を考えた（**Top-Mode Standard Model****⁾ と名付けた）[18)]．4 体フェルミ相互作用

---

*）　この極限は注意深くしなければならない[21)]．

**）　名前の由来は標準模型のヒグス系の NG ボソンがヒグス場の凝縮 $\langle \mathrm{Re}\,\phi^0 \rangle$ で生じる（"ヒグスモード"）のに対し，我々の NG ボソンはトップクォークの凝縮 $\langle \bar{t}t \rangle$ により生成されるからである．

の起源はいま問わないこととして，トップクォークの g のみが臨界曲線の上にある（$\Sigma(0) \neq 0$）と仮定すると，凝縮の起こるのは $\langle\bar{t}t\rangle$ のみであり，これがW, Zに質量を与えるNGボソンを生成する．また t のみが力学的質量を得（$m_t \sim 200$ GeV），これにより t クォークの質量のみが他のクォーク・レプトンより大きな理由が説明できる．$\gamma_m \simeq 2$ により低エネルギー現象に関する限り標準模型と全く同じ結果を与えるが，$m_{W,Z}$ より大きなエネルギー領域では違った予言を与える可能性があるので，近い将来TeVエネルギー領域での大型加速器実験で検証されることを期待したい．

大異常次元を持った対称性の力学的破れの研究は，その基礎・応用とも日本の独創で始まりそれが世界の流れになった数少ない分野の一つである．なお広大な未開の原野を残しているこの地に，一人でも多くの日本の若者が開墾の鍬を入れられんことを切望してやまない*)．

参考文献

1) 総合報告として，E. Farhi and L. Susskind, *Phys. Rep.* **74** (1981) 277.
2) 総合報告として，K. Yamawaki, Proceedings of 1988 International Workshop on New Trends in Strong Coupling Gauge Theories, Nagoya, 24-27 August, 1988, eds. by M. Bando, T. Muta and K. Yamawaki (World Scientific Co. Pte. Ltd., Singapore 1989).
3) B. Holdom, *Phys. Rev.* **D24** (1981) 1441; H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 1511; K. Yamawaki and T. Yokota, *Nucl. Phys.* **B223** (1983) 144.

*) この原稿のでた（1989年）後の発展は次の会議論を参照のこと．
Proceedings of 1990 International Workshop on Strong Coupling Gauge Theories and Beyond, July, 28-31, 1990, Nagoya, eds. T. Muta and K. Yamawaki (World Scientific Pub. Co., Singapore, 1991)
Proceedings of 1991 Nagoya Spring School on Dynamical Symmetry Breaking, April 23-27, 1991, Nagoya, ed. K. Yamawaki (World Scientific Pub. Co., Singapore, 1992)
Proceedings of 1996 International Workshop "Perspectives of Strong Coupling Gauge Theories, Nov. 13-16, 1996, Nagoya, eds. J. Nishimura and K. Yamawaki (World Scientific Pub. Co., Singapore, 1997)

4) K. Yamawaki, M. Bando and K. Matumoto, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 1355; M. Bando, K. Matumoto and K. Yamawaki, *Phys. Lett.* **178** B (1986) 308.
5) T. Akiba and T. Yanagida, *Phys. Lett.* **169B** (1986).
6) T. Maskawa and H. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **52** (1974) 1326; **54** (1975) 860.
7) R. Fukuda and T. Kugo, *Nucl. Phys.* **B117** (1976) 250.
8) V. A. Miransky, *Phys. Lett.* **91B** (1980) 421; P. I. Fomin, V. P. Gusynin, V. A. Miransky and Yu. A. Sitenko, *Riv. Nuovo Cim.* **6** (1983) 1; V. A. Miransky, *Nuovo Cim.* **90A** (1985) 149.
9) W. A. Bardeen, C. N. Leung and S. T. Love, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 1230; C. N. Leung, S. T. Love and W. A. Bardeen, *Nucl. Phys.* **B273** (1986) 649.
10) J. B. Kogut, E. Dagotto and A. Kocic, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 772; **61** (1988) 2416; M. Okawa, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 1244.
11) D. Atkinson, P. W. Johnson and K. Stam, *Phys. Lett.* **201B** (1988) 105; T. Appelquist, K. Lane and U. Mahanta, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 1553; B. Holdom, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 997.
12) K.-I. Kondo, Y. Kikukawa and H. Mino, *Phys. Lett.* **200B** (1989) 270.
13) T. Appelquist and L. C. R., Wijewardhana, *Phys. Rev.* **D35** (1987) 774; **D36** (1987) 568; T. Appelquist, D. Carrier, L. C. R. Wijewardhana and W. Zheng, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1114.
14) M. Bando, T. Morozumi, H. So and K. Yamawaki, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 389; K.-I. Aoki, M. Bando, H. Mino, T. Nonoyama, H. So and K. Yamawaki, *Prog-Theor. Phys.* **82** (1989) 388.
15) T. Appelquist and J. Carazzone, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2856.
16) J. Kogut, E. Dagotto and A. Kocic, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 1001.
17) K-I. Kondo, H. Mino and K. Yamawaki, *Phys. Rev.* **D39** (1989) 2430; see also T. Appelquist, M. Soldate, T. Takeuchi and L. C. R. Wijewardhana, Yale University Preprint YCTP-P19-88 (1988).
18) V. A. Miransky and K. Yamawaki, *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 129.
19) V. A. Miransky, M. Tanabashi and K. Yamawaki, *Phys. Lett.* **221B** (1989) 177; *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 1043.
20) V. A. Miransky, T. Nonoyama and K. Yamawaki, *Mod. Phys. Lett,* **A4** (1989) 1409.
21) T. Nonoyama, T. B. Suzuki and K. Yamawaki, *Prog. Theor, Phys*, **81** (1989) No. 6

（やまわき・こういち，名古屋大学・理学部）

II．素粒子物理と場

複合模型におけるヒグスボソン

山脇 幸一

1．質量の起源と複合模型

万物の起源は何であるか，これは人類が問い続けてきた問題であり，近代科学がどんどんとミクロの世界に立ち入ってきた所以でもある．この「私」は細胞からできており，細胞は分子から，分子は原子から，原子は原子核と電子から，原子核は核子（陽子と中性子）から，さらに核子はクォークから，という風に，この我々の世界は異なる階層からなる複合構造の連鎖で構成されていることがわかってきた．それはあたかもロシアの人形マトリョーシカのように入れ子の構造が続いてきたのである．このミクロの認識の進化とともに，質量の問題もまた深化してきた．「私」の質量は細胞の質量からなり，細胞の質量は分子の質量，分子の質量は原子のそれ，原子の質量は主に原子核から，原子核の質量は核子からくる，さらに核子の質量はクォークの質量に帰せられる，という訳である．このように，近代科学の世界認識の発展は本質的に原子論的であり，物質を絶えず下部の（よりミクロの）階層の複合系として説明してきた「複合模型」の発展に他ならない．この原子論的世界観の最先端にあるのが，現在物質の最も基本的な要素であるクォークやレプトン（電子の仲間）等の素粒子を研究する素粒子物理学である．すなわち，万物の質量の起源は**素粒子の質量の起源**の問題に他ならない．

実際，「素粒子物理学において現在最も重要な課題は何か」という質問に専門家はどう答えるか，という面白い調査をした人がいる．ノーベル物理学賞の物理部門の審査員5名の内の一人であり著名な素粒子論研究者でもあるC. Jarlskog女史である．彼女のアンケートは1994年名古屋で三田一郎氏が主宰したB物理学の国際会議で披露された．それによると，理論家も実験家もともに一番多く挙げたのは質量の問題で，2位以下に倍以上の差をつけて全体の1/3〜1/2の得票を得ている．ことほどさように質量の問題は現代素粒子物理学の最重要課題である．この問題は，**トップクォーク発見**によって，さらにクローズアップされてきた．

このトップクォーク発見は，まぎれもなく最近の素粒子物理学におけるトップニュースであろう．1972年の小林・益川理論[1]で予言されて以来，実に23年振りにその存在が確証されたものである．これだけ長期にわたって発見されなかったのは，ひとえにその質量の大きさ故である．発見したフェルミ国立研の2実験グループの測定値は，それぞれ176±13 GeV, 199＋38/−36 GeV（＋/−は誤差）である*),**)．これが他の素粒子の質量に比べていかに大きいものかは，図1から見て取れ

*） 素粒子物理学で一般的な単位系は自然単位系と呼ばれるもので，プランク定数 $\hbar=1$，光速度 $c=1$ととる．このため質量もエネルギーも運動量も同様にeVで表す．1 TeV ＝ 10^3 GeV ＝ 10^6 MeV ＝ 10^{12} eV．物理量の次元はすべて質量次元のベキで表すことにする．

**） 1998年現在の値は173.8±5.2 GeVとなっている．

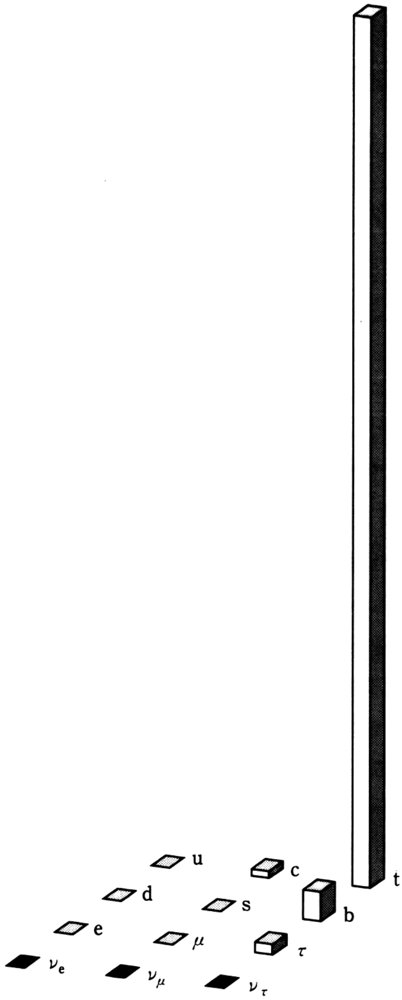


図1　クォーク・レプトンの質量の比較．クォーク（u, d, c, s, t, b）とレプトン（e, ν_e, μ, ν_μ, τ, ν_τ）．トップクォークの質量は 176 GeV を使った．

よう．ちなみに，核子あるいは水素原子の質量は約 1 GeV である．後に述べるように素粒子の質量の起源を特徴付けるエネルギーの大きさは約 250 GeV であるが，ひとりトップクォークのみがこの値に極めて近い質量を持っているのである．これは何かトップクォークが**質量の起源に深く関与**していることを示唆するものではなかろうか．

実際，このような異常に大きなトップクォーク質量を予言したのは，筆者ら（Miransky・棚橋・山脇）[2] の提唱した「**トップクォーク凝縮模型**」である．この模型では，通常質量の起源を担うと思われている未発見粒子**ヒグスボソン**（H）の真空期待値 $\langle H\rangle \equiv \langle 0|H|0\rangle \approx 250$ GeV の代わりに，トップ

表1　“トップクォーク質量”の歴史[注)]
（奇数年：レプトン-フォトン会議，偶数年：高エネルギー会議）

1972	**ボトム・トップクォーク予言**	**小林-益川**
1977	**ボトムクォーク発見**	**フェルミ研**
1979	＞15 GeV	PETRA（ハンブルグ）
1980	＞18 GeV	PETRA（ハンブルグ）
1981	＞18 GeV	PETRA（ハンブルグ）
1982	＞18 GeV	PETRA（ハンブルグ）
1983	＞20.7 GeV	PETRA（ハンブルグ）
1984	＞23.3 GeV	PETRA（ハンブルグ）
1985	＞23.3 GeV	PETRA（ハンブルグ）
1986	＞23.3 GeV	PETRA（ハンブルグ）
1987	＞26 GeV	トリスタン（つくば）
1988	**＞28 GeV**	トリスタン（つくば）
	トップクォーク凝縮模型	
1989.1.3	**≃250 GeV**	**Miransky-棚橋-山脇**
1989.2 月	≃100 GeV	南部（非出版）
1989	**＞72 GeV**	**TEVATRON（シカゴ）**
（8.7-8.12）	130±50 GeV	“理論”（標準模型）
	トップクォーク凝縮模型（発展版）	
1989.7.21	≃220 GeV	Bardeen-Hill-Lindner（再定式化）
1989.12.27	≃190 GeV（↓180 GeV）	Clark-Love-Bardeen（超対称化）
1990	＞89 GeV	TEVATRON（シカゴ）
	139^{+33+16}_{-39-16} GeV	“理論”（標準模型）
1991	＞89 GeV	TEVATRON（シカゴ）
	144^{+23+19}_{-26-21} GeV	“理論”（標準模型）
1992	＞91 GeV	TEVATRON（シカゴ）
	139^{+24+19}_{-30-22} GeV	“理論”（標準模型）
1993	＞113 GeV	TEVATRON（シカゴ）
	166^{+17+19}_{-19-22} GeV	“理論”（標準模型）
1994	174^{+10+13}_{-10-12} GeV	TEVATRON/CDF（シカゴ）
	＞131 GeV	TEVATRON/D0（シカゴ）
	178^{+11+18}_{-11-19} GeV	“理論”（標準模型）
1995	**176^{+8+10}_{-8-10} GeV**	**TEVATRON/CDF（シカゴ）**
	199^{+19+22}_{-21-22} GeV	**TEVATRON/D0（シカゴ）**

注）　トップクォークの質量に関する実験値の変遷．国際会議（レプトン-フォトン会議，高エネルギー会議）の報告をもとに作成．中央の数値は実験値（±の数字は統計誤差，系統誤差の順）もしくは理論予言値．右側の欄は実験値を出した加速器（PETRA，トリスタン，TEVATRON）もしくは実験グループ（CDF，D0）もしくは理論論文の著者．「“理論”（標準模型）」は，標準模型を 100％正しいとして様々な実験値（トップクォークを直接測るのではない間接実験）を再現するためにはトップクォーク質量がいくらでないといけないかを分析したもの．

クォーク(t)とその反粒子$(\bar{t})$の対(つい)凝縮$\langle\bar{t}t\rangle$(とそれに起因する力学的に生成されたトップクォークの質量) がすべての素粒子の質量の起源を与え，ヒグスボソンはトップクォークとその反粒子からなる複合粒子に過ぎない，すなわち$H\sim\bar{t}t$. 類似の考えは，南部[3]によっても独立に提唱された．とくに筆者らは，トップクォークの質量が実験的には28 GeV程度の下限しかなかった時点で，250 GeVに近い予言を行った．その後Bardeen・Hill・Lindner[4]によるエレガントな再定式化により，筆者らの予言は220 GeVに修正されたが，さらに超対称性（フェルミオンとボソンの間の対称性)を取り入れた修正版では[5] 180-190 GeVとなった．これは上の実験値に極めて近い値である．表1にトップクォークの質量の"歴史"をまとめた．

本稿では，このトップクォーク凝縮模型をはじめ冒頭に述べた原子論的自然観の最先端での追求，すなわち現在素粒子と思われているヒグスボソンをさらに基本的な粒子からなる複合粒子として質量の謎に迫る最近の試みについて紹介する．(関連した解説は文献6).)

2. ヒグスボソンは素粒子か？

周知のように，現代素粒子論は「標準模型」として，強い相互作用を記述するQCD(量子色力学)と，弱い相互作用・電磁相互作用(「電弱相互作用」)のGlashow-Salam-Weinberg（GSW）模型という2つのゲージ理論を基盤としている．ゲージ理論はゲージ対称性に基づき理論を構成し，力を媒介するゲージボソンの質量は**ゲージ対称性**により原理的にゼロである．このためGSW模型では，ゲージボソンであるW, Zボソンがゼロ質量になるのみならず，このゲージ対称性がゼロ質量フェルミオンの対称性である**カイラル対称性**でもあるため，クォークやレプトンもまたゼロ質量となってしまう．

では，質量ゼロの世界から出発して森羅万象質量のあるこの世界はどのようにして実現するか．ここに登場するのが**ヒグスボソン**である．ヒグスボソンは，全世界に一様に広がるその真空期待値によりGSW模型のゲージ対称性を破り，ゲージボソンW, Zとクォーク・レプトンの質量を同時に可能にする，すなわちあらゆる素粒子の質量の源に他ならない．それはあたかも19世紀物理学が想定していたエーテルのようにこの空間に充満し，素粒子がこの"エーテル"の海を走り抜ける際にそれとどれだけ強くぶつかるかで質量が決定する．すなわち，ぶつかる際に相互作用の強さに比例してヒグスボソンの真空期待値$\langle H\rangle\approx250$ GeVをどれだけ貰うかが個々の素粒子の質量という訳である．真空期待値による対称性の破れは**対称性の自発的破れ**と呼ばれ，運動方程式（ハミルトニアン）の対称性は破れることなく解（物理的状態）の対称性が破れるのである．

では，万物に質量を与えるのみのために導入されたこの謎の粒子ヒグスボソンとは，一体何物であろうか．あらゆる実験的探索にもかかわらず，現在のところこの粒子は発見されていないのである．ここで重要なヒントになりうるのは，ヒグスボソンの力学系(**ヒグス系**)とQCDにおける複合粒子であるπ中間子の低エネルギーの振舞いを記述する理論 —— **シグマ模型** —— とが，**全く等価な力学系**であることである．

QCDはクォークからその複合系としてのハドロン(核子，π中間子など)を構成する力学であるが，π中間子を構成するuクォーク，dクォークのクォークの質量はほとんど0とみなしてよいため，ゼロ質量フェルミオンの対称性であるカイラル対称性が近似的に成立する．ところが，クォーク(q)と反クォーク$(\bar{q})$ はQCDの引力によりスカラー（スピンがゼロ）のボソンを形成し，これがボース統計に従って真空にボース凝縮を起して真空期待値$\langle\bar{q}q\rangle$ (**"対凝縮"**) を与える．これでカイラル対称性が自発的に破れてクォークは質量(**"力学的質量"**) を持つことができる*)．π中間子

*) これは超伝導のBCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) 理論と類似しており，$\bar{q}q$対凝縮，力学的質量はそれぞれBCS理論のクーパー対，エネルギーギャップに対応する．

は，このカイラル対称性の自発的破れに伴う**南部・ゴールドストン（NG）ボソン**なのである．NGボソンとは，一般に系の本来持つ対称性が物理的状態の対称性として現れない代償として要請されるゼロ質量のボソンのことである．（π 中間子の質量はクォークの小さな質量（カイラル対称性のわずかな破れ）のためゼロでなく，厳密な意味でのNGボソンではないが，いまこれはあまり重要なことではない．）

ところが，この複合粒子であるNGボソン π 中間子の低エネルギー領域（長波長領域）での性質は，これをあたかも“素”粒子であるかのように扱う理論 —— シグマ模型 —— で完璧に記述されることがわかっている．QCDがクォーク場とグルーオン場の微視的力学変数で書かれた微視的理論であるのに対し，このシグマ模型は巨視的力学変数であるハドロン場，すなわち擬スカラー（スピンが0でパリティが負）の π 中間子の3つの荷電状態 π^+, π^-, π^0 と電荷ゼロの複合スカラー（スピンが0でパリティが正）ボソンである σ 中間子の合計4つのボソン場，で構成される巨視的理論に他ならない*)．σ 中間子は複合系 $\sigma \sim \bar{q}q$ であり，その真空期待値 $\langle\sigma\rangle$ がQCDのクォーク・反クォーク対凝縮 $\langle\bar{q}q\rangle$ の代わりをする．$\langle\sigma\rangle$ を π 中間子の崩壊定数 f_π（$\approx$93 MeV）にとると，このシグマ模型はカイラル対称性を自発的に破ったQCDの低エネルギー極限を完全に再現する．

さてこのシグマ模型こそは，我々の問題とするヒグス系のひな型に他ならない．実際，$\langle\sigma\rangle$ を93 MeVの代わりに250 GeVと読み替えると，両者は全く等価な（ラグランジアン・ハミルトニアンが同じ）力学系なのである．すなわち，ヒグス系は通常2つの複素数のヒグス場の組（実数成分で見ると合計4個の場）で書かれており，このうち **σ 中間子に対応するのが他ならぬヒグスボソン**であって，$\langle H\rangle \approx 250$ GeV．GSW模型のヒグス系では，カイラル対称性の自発的破れはすなわちゲージ対称性のそれであり，π 中間子に対応する残りの3成分のNGボソンは同じ量子数を持つゲージボソン W^+, W^-, Z^0 の縦波成分として吸収されて（“食われて”），これらのゲージボソンに質量を与える．これがヒグス機構である．さらにクォーク・レプトンの方もカイラルなゲージ対称性の自発的破れにより，質量を獲得することができる．これらの質量はその由来から明らかなように，すべて $\langle\sigma\rangle$ に対応する $\langle H\rangle \approx 250$ GeVに比例する．この比例係数 —— ヒグスボソンとの結合定数 —— の多様さが素粒子の質量の多様さを与えるが，GSW模型の枠内では理論的に決まらない“神の与えた”パラメータである．実はこのような任意のパラメータの数は20個近くに上る．

幸か不幸かこのGSW模型は，現在までの実験の到達エネルギーである100 GeV領域までは驚くべき精度で成功を収めている．しかも**くりこみ可能**な理論という特質から，その適用限界があらわにならない論理構造をなしている．しかしながら，その質量生成の機構は，任意パラメータの多さからもわかるように，シグマ模型と同様あまりにも**現象論的色彩**が強すぎる．実際，シグマ模型もくりこみ可能な理論であり，論理的には適用限界がなくてもよい．にもかかわらず，歴史の語るように，その特徴的スケール $\langle\sigma\rangle \approx 93$ MeVを大幅に越える**高エネルギー領域では**この模型は破綻し，ハドロンの**複合構造**があらわとなってクォーク・グルーオンを素粒子とするQCDに移行しなければならなかったのである．任意のパラメータであったハドロンの質量や結合定数などは，QCDではすべて第一原理から計算できるものとなる．このようにエネルギー領域が上がるとともに新たな複合構造が発見され，理論がより微視的な基礎理論に変更されるということは，自然科学において最も普通のことであり，冒頭に述べた原子論的自然観が今日まで貫徹してきた所以である．

そこで，シグマ模型における σ 中間子がQCDの複合粒子 $\sigma \sim \bar{q}q$ であったのと同様，それと等価なヒグス系におけるヒグスボソンが**QCDと類似の力学**における基本フェルミオン（F）からなる

*）超伝導の例で言えば，これはBCS理論に対する巨視的理論，ギンツブルグ・ランダウ理論に対応する．

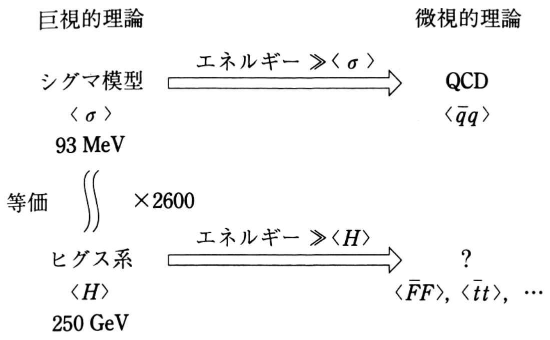


図2

複合粒子 $H \sim \bar{F}F$ である可能性はないだろうか．対応する固有エネルギースケールが，$\langle\sigma\rangle \approx 93$ MeV に対して，$\langle H\rangle \approx 250$ GeV のスケールアップであるので，基礎理論の方も

250 GeV/93 MeV≈2600 倍

のスケールを持つ“QCD もどき”を考える．これが**テクニカラー**理論[7]と呼ばれる複合ヒグス模型の基本アイデアである（図2）．“テクニカラー”とは，QCD が **Q**uantum **C**hromo**d**ynamics すなわち Chromo(“色”——“カラー”——)の力学と呼ばれているのをもじった駄洒落に由来する．クォークに対応する構成子をテクニフェルミオン，グルーオンに対応してテクニグルーオン，その他何でも対応物に“テクニ”を冠して呼ぶことにする．(テクニ π 中間子，テクニ σ 中間子——ヒグスボソンのこと——，等.）次元を持った物理量はすべて 2600 倍にスケールアップする．かくして質量の起源は，ヒグスボソンを構成するテクニフェルミオンの対凝縮・力学的質量にあるという描像に到達する．

3．“堅く結合した”複合ヒグスボソン

ところが，テクニカラーは W, Z ボソンの質量の起源の説明には見事な成功を収めたが，不幸にして**クォーク・レプトンの質量は3桁小さい値**しか再現できないことが判明した．この模型ではテクニフェルミオンの対凝縮・力学的質量がすべての質量の起源なので，クォーク・レプトンの質量はそれを貰うことにより獲得される．そのためクォーク・レプトン(f)とテクニフェルミオン(F)とを結び付ける相互作用,“拡張されたテクニカラー (ETC)”，を導入する．そのエネルギースケールを Λ とすると，クォーク・レプトンの質量 $m_{\rm f}$ は

$$m_{\rm f} \sim \frac{1}{\Lambda^2}\langle(\bar{F}F)_\Lambda\rangle \qquad (1)$$

と与えられる．ここで $\langle(\bar{F}F)_\Lambda\rangle$ はスケール Λ で測られたテクニフェルミオン対凝縮の値である．一般にフェルミオン対凝縮は**量子効果によるくりこみ**のためこれを“測る”エネルギースケールにその値が依存し，これを別のスケール $\mu\,(\ll\Lambda)$ で評価すると両者は

$$\langle(\bar{F}F)_\mu\rangle = Z_m\langle(\bar{F}F)_\Lambda\rangle \qquad (2)$$

のように，質量のくりこみ定数 $Z_m = Z_m\!\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)$ で関係する．

さてここが重要なところであるが，テクニカラーが範とした QCD では高エネルギー領域（漸近領域）で相互作用が小さくなりついには相互作用のない“自由理論”に近づくという**“漸近自由”**の性質があり，量子効果が小さく $Z_m \approx 1$ となる．QCD の単純なスケールアップであるテクニカラーでは，模型の詳細にもよるが典型的には

$$\langle(\bar{F}F)_\Lambda\rangle \approx \langle(\bar{F}F)_\mu\rangle \approx (250\ {\rm GeV})^3$$
$$(\mu \approx 250\ {\rm GeV})$$

であり，一方実験的制限から $\Lambda > 350$ GeV であるので，結局クォーク・レプトンの質量は上の公式(1)から高々

$$m_{\rm f} = (250\ {\rm GeV})^3/(350\ {\rm TeV})^2 \simeq 0.1\ {\rm MeV}$$

となってしまう．これと比すべきクォーク(s クォーク)の質量は 150 MeV 程度であるため，約3桁小さい値しか再現できないことになる．“テクニカラーは死んだ”と一時信じられた所以である．

しかしながら，この困難は決して複合ヒグス模型そのものの死を意味しない．図2の“？”の部分に対する力学として，既成の QCD のコピーをもってくるのが安直に過ぎただけである．実際，

QCDと違って高エネルギー領域で相互作用が小さくならない理論では，上の事情は一変する．高エネルギー領域での量子効果は大きく残って，一般に

$$Z_m \simeq \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^{-\gamma_m} \quad (\Lambda \gg \mu) \qquad (3)$$

となり，漸近自由の場合の $Z_m \approx 1$ $(\gamma_m \approx 0)$ からずれることが期待される．γ_m は**異常次元**と呼ばれるもので，$\langle(\bar{F}F)_\Lambda\rangle/\Lambda^{\gamma_m} \approx \langle(\bar{F}F)_\mu\rangle/\mu^{\gamma_m}$ となることからもわかるように，量子効果のために対凝縮の質量次元が実効的に γ_m だけ減っていることからこの名がある．そこで，もし $\gamma_m \gtrsim 1$ の理論があったとすると，$\langle(\bar{F}F)_\Lambda\rangle$ は $\langle(\bar{F}F)_\mu\rangle$ に比べて

$$(350\ \mathrm{TeV}/(250\ \mathrm{GeV}))^{\gamma_m} > 10^3$$

の増幅因子を稼いで，上のテクニカラーの困難は消失する[8]．

では一体，そのような**大きな異常次元を持つ場の理論**は存在するのだろうか．実は，時間1次元・空間3次元の我々の4次元世界ではそのような場の理論は存在しないというのが長い間の“常識”であった．ところが，驚くべきことにそのような力学的模型は存在した！ QCDのような漸近自由理論では結合力の強さが高エネルギー領域で急速に小さくなる（“running”と表現する）のに対して，これがほとんど一定であるような（“**walking**”）**ゲージ理論**の場合には，実際 $\gamma_m \approx 1$ であることが判明したのである[9]．ほぼ10年ほど前のこの $\gamma_m \approx 1$ のテクニカラー（“ウォーキング・テクニカラー”）の発見以来，大異常次元を持つ理論の研究は，場の理論の基礎的研究と素粒子模型構築への応用の両面で大きく発展した．とくに，4体フェルミ理論を含む**“ゲージ化された南部・ヨナラシーニョ（NJL）模型”**がさらに大きな異常次元 $(2 > \gamma_m > 1)$ を持つことがわかるにおよんで，これに基づく複合ヒグス模型として，**強結合ETCテクニカラー**模型[11]，**トップクォーク凝縮**模型[2,3,4] などが提唱された．基礎理論的にも，“ゲージ化されたNJL模型”の**くりこみ可能性**の発見[10] など，旧来の常識を破る展開を示している．

大きな異常次元の力学の本質を最も鮮やかに見せてくれるのは，短距離相互作用たる4体フェルミ理論である．これは超伝導のBCS理論と同じであるが，相対論的な場合を南部・ヨナラシーニョ（NJL）模型[12] と呼んでいる．相互作用ハミルトニアン密度はフェルミオン場 ψ に対して $(G/2)(\bar{\psi}\psi)^2$ となる．ここで G は結合定数である．この引力のために対凝縮 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0$ が起こると，この相互作用は $G\langle\bar{\psi}\psi\rangle\bar{\psi}\psi$ の部分を持つ．これはフェルミオンの質量項 $-m\bar{\psi}\psi$ と解釈できる．（これはもちろんカイラル対称性の自発的破れである．） それゆえ，$m = -G\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ となり，右辺はさらに質量を得たはずのフェルミオンの伝播関数を用いて書き直すことができて，

$$m = \frac{G}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{m}{p^2+m^2}$$
$$= m\cdot\frac{G}{4\pi^2}\left(\Lambda^2 - m^2\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right). \qquad (4)$$

ここで（ユークリッド）運動量積分の上限を $p^2 = \Lambda^2$ で切断した（$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ は $\langle(\bar{\psi}\psi)_\Lambda\rangle$ と読む）．これは凝縮が起った $(m \neq 0)$ と仮定してその m が自己整合的に従うべき条件を定めた式であり，いわゆるギャップ方程式になっている．$m = 0$ の自明な解（対称性の破れない解）は常に存在するが，$g \equiv G\Lambda^2/(4\pi^2) > 1$ では $m \neq 0$ の非自明な（対称性の破れた）解が存在し（(4)式を m で割ってみればわかる），より安定な解となる．$g = g_{cr} = 1$ は臨界点であって，$g = g_{cr} > 1$（破れた相，$m \neq 0$, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0$）と $g = g_{cr} < 1$（破れない相，$m = \langle\bar{\psi}\psi\rangle = 0$）とを分かつ点である．この非自明解に対し，(4)式から

$$\langle(\bar{\psi}\psi)_\Lambda\rangle \sim m\Lambda^2,\ \langle(\bar{\psi}\psi)_m\rangle \sim m^3 \quad (\Lambda \gg m)$$

であるので，(2)式から $Z_m \sim (\Lambda/m)^{-2}$，すなわち異状次元は $\gamma_m = 2$ となる！

実は，この模型自体は**くりこみ不可能**であって，異常次元の議論も形式的なものに過ぎない．しかしながら，これに**ゲージ相互作用が加わると**この“ゲージ化されたNJL模型”は，驚くべきことに**くりこみ可能**になってしまう[10]．実際，ゲージ結合定数（の2乗を 4π で割ったもの）α がウォーキング（一定）のときに，“はしご近似”の範囲ではあ

るがくりこんだ理論が求まり，臨界点(“臨界線”)

$$g = g_{cr} = (1+\sqrt{1-\alpha/\alpha_c})^2/4$$
$$(0<\alpha<\alpha_c = \pi/3)$$

の近傍で，異常次元は

$$\gamma_m = 1+\sqrt{1-\alpha/\alpha_c}$$

となることがわかったのである．これはNJL模型($\alpha \to 0, \gamma_m \to 2$)とウォーキング・ゲージ理論($\alpha \to \alpha_c, \gamma_m \to 1$)との両方の極限を含んだ大きな値($2>\gamma_m>1$)に他ならない．(ウォーキングでないときも同様.)

この“ゲージ化されたNJL模型”の結論は，**低エネルギー領域では全く同じ**シグマ模型であっても，**高エネルギー領域では（基礎理論としては）違った**理論が無限個(α毎に)存在することを明示したものに他ならない．異常次元の大きさは高エネルギー領域（短波長領域）での結合力の強さを示すものであり，このような大きな異常次元を持つ理論では，複合粒子は中心部まで堅く結合しており複合構造が見えにくいことになる．複合ヒグスボソンは高いエネルギースケールまで“素”粒子のように振る舞うのである．これを**“堅く結合した複合ヒグス模型”**と呼ぼう．この中には，すでに述べたウォーキング・テクニカラー($\gamma_m \approx 1$)に加え，ETCの4体フェルミ相互作用でテクニフェルミオンがより堅く結合した**強結合ETCテクニカラー**($2>\gamma_m>1$)[11]．さらにはテクニフェルミオンの代わりにトップクォークが4体フェルミ相互作用で堅く結合した**トップクォーク凝縮**模型(“トップモード標準模型”，$\gamma_m \approx 2$)[2,3,4]などがある．

4．トップクォークとヒグスボソン——結び

とくに，冒頭でも述べたトップクォーク凝縮模型では，$\langle H\rangle \approx 250$ GeVがトップクォーク(t)の対凝縮$\langle \bar{t}t\rangle$に置き換わるので，トップクォークの力学的質量m_tも自然にこのオーダーの値をとる．実際，筆者らのオリジナル論文[2]では，4体フェルミ相互作用とQCD（この場合QCDの力による凝縮は無視できる）のみの“ゲージ化されたNJL模型”に基づいて評価し，$m_t \approx 250$ GeVを予言した．これに対してBardeen・Hill・Lindner[4]が非常に見通しの良い再定式化を行い，補正として複合ヒグスが低エネルギー領域では“素”粒子のように振る舞うための量子効果などを加味することにより，上の予言を$m_t \approx 220$ GeVに修正した．さらに，超対称性を持ち込んだ修正版[5]では，この予言は$m_t \approx$180-190 GeVにまで下がった．先にも触れた通り，この超対称性版の値は最近発見されたトップクォークの測定値の中心値に大変近い．いずれにせよ，現段階ではまだ実験の誤差が大きく，模型の詳細の検証は今後の実験に待つ他はない．むしろ重要なことは，トップクォークのみが突出して250 GeVに近い質量を持つという重大な事実を，この模型が予言し得たことである．この意味で，トップクォーク凝縮模型は定性的に検証されたと言えるのではなかろうか．

顧みれば，そもそも複合ヒグス模型の考えはQCDとの類比から発想されたものである．ところが，この単純なQCDもどきは実験と合わなかった．高エネルギー領域での振る舞いは全く異なるものが要求されたのである．人類の複合性の探求の長い歴史の中でも，マトリョーシカのように全く相似なものが単純に繰り返すことは絶えてなかったのであって，階層が異なるにつれ異なる理論が現れるのは，けだし当然のことではあった．トップクォーク発見という新たな事態を迎えて今後複合ヒグス模型がどのように展開されるのか，大きな異常次元を持つ場の理論と模型構築の一層の発展を期待して筆をおく．

参考文献

1) M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652 (1973).
2) V. A. Miransky, M. Tanabashi and K. Yamawaki, *Phys. Lett.* **B221** (1989) 177; *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 1043.
3) Y. Nambu, Chicago preprint EFI 89-08 (February 1989).

4) W. A. Bardeen, C. T. Hill and M. Lindner, *Phys. Rev*. **D41** (1990) 1647.

5) T. E. Clark, S. T. Love and W. A. Bardeen, *Phys. Lett*. **B237** (1989) 235.

6) 山脇幸一：「素粒子の古くて新しい模型」（本別冊号）；科学, **60**（2月号）(1990) 87；素粒子論研究, **85**（8月号）(1992) 299.

7) S. Weinberg, *Phys. Rev*. **D13** (1976) 974; **D19** (1979) 1277; L. Susskind, *Phys. Rev*. **D20** (1979) 2619, レヴューはE. Farhi and L. Susskind, *Phys. Rep*. **74** (1981) 277.

8) B. Holdom, *Phys. Rev*. **D24** (1981) 1441.

9) K. Yamawaki, M. Bando and K. Matumoto, *Phys. Rev. Lett*. **56** (1986) 1335; T. Akiba and T. Yanagida, *Phys. Lett*. **B169** (1986) 432; T. Appelquist and L. C. R. Wijewardhana. *Phys. Rev*. **D36** (1987) 568, これら以前の純数値的考察はB. Holdom, *Phys. Lett*. **B150** (1985) 301.

10) K.-I. Kondo, S. Shuto and K. Yamawaki, *Mod. Phys. Lett*. **A6** (1991) 3385; K.-I. Kondo, M. Tanabashi and K. Yamawaki, *Prog. Theor. Phys*. **89** (1993) 1249; N. V. Krasnikov, *Mod. Phys. Lett*. **A8** (1993) 797; M. Harada, Y. Kikukawa, T. Kugo and H. Nakano, *Prog. Theor. Phys*. **92** (1994) 1161.

11) V. A. Miransky and K. Yamawaki, *Mod. Phys. Lett*. **A4** (1989) 129; K. Matumoto, *Prog. Theor. Phys*. **81** (1989) 277; T. Appelquist, T. Takeuchi, M. Einhorn and L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Lett*. **B220** (1989) 223.

12) Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev*. **122** (1961) 345.

（やまわき・こういち，名古屋大学・理学部）

Ⅱ．素粒子物理と場

格子 QCD

岩崎　洋一

1．序

陽子，中性子はクォーク3個，パイ中間子はクォークと反クォークそれぞれ1個から構成されている．これらクォークから構成されている粒子をハドロンと総称する．クォークを結びつけている糊の役割を果たすのがグルーオンである．クォーク，グルーオンは，量子電磁気学(QED)の電子，光子(フォトン)にそれぞれ対応している．しかし，電子，光子と異なり，クォーク，グルーオンは単独で粒子として発見されたことはない．これを「閉じこめ」という．

クォーク・グルーオンの基本法則が格子 QCD である．この基本法則からクォークの「閉じこめ」をはじめ，ハドロンの質量，崩壊定数，散乱振幅など諸々の物理量を導き出せるはずである．また，宇宙初期の超高温(1兆度以上)では，陽子などのハドロンはクォーク・グルーオン・プラズマ状態になっていたと考えられており，その状態の性質，プラズマ状態からハドロン状態への相転移の性質などを格子 QCD を用いて解明できるはずである．

2．クォークの「香り」と「色」

クォークは少なくとも6種類あると考えられている．1995年に，なかなか発見されなかった6番目のトップ・クォークが発見され新聞紙上を賑わせたことは記憶に新しい．この6種類の自由度を「香り」と呼ぶ．表1にこれを記す．陽子，中性子，パイ中間子など我々になじみの深い原子核の構成要素は，u(up)クォークとd(down)クォークから成り立っている．

表1　6種類のクォーク

			電　荷
u (up)	c (charm)	t (top)	+2/3 e
d (down)	s (strange)	b (bottom)	−1/3 e

6種類のクォークはそれぞれ3種類の「色」(color)電荷を持つ．「色」として，通常，赤青緑(3原色)を当てはめるが，「色」といっても通常の色とはなんの関係もない抽象的なものであり，もちろん色の名称自体に意味はない．ただの1, 2, 3でよい．この「色」の自由度に関する著しい特徴は，全てのハドロンが「無色」である点である．すなわち，陽子と中性子の違いは「香り」の違いであり，ともに「色」に関しては「無色」である．この点はさらに次節でふれる．

3．量子色力学

前節で述べたように，それぞれのクォークは3種類の色を持っている．そこで，クォークに対する場を

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

と表す．Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 がおのおの4成分を持つディラック場であり，添字の1, 2, 3は，赤青緑に対応する．座標 x は3次元空間の $\vec{x}$ と時間 t を表す．

ここで，どれを赤と呼び，どれを青と呼ぶかに対して理論が不変であること，すなわち3つの色の間の回転に対して理論は不変であることを要請する．この回転は

$$\Psi'(x) = V\Psi(x) \quad (2)$$

と書き表される．ここで，われわれの興味の対象は色の自由度なので，$\Psi_i(x)$ $(i = 1〜3)$ が4成分であることは忘れて，それぞれが単純に複素数であると考えてよい．すなわち，変換(2)は3成分の複素ベクトルの回転である(V は3行3列の複素行列である)．これはユニタリー変換と呼ばれ

$$V^{\dagger} V = 1 \quad (3)$$

を満たす．このうち，全体の複素数の位相だけを変える変換は関係がないので

$$\det V = 1 \quad (4)$$

という条件を置く．式(3)と(4)を満たす変換を $SU(3)$ (3次元 special unitary)群という．

クォークはこの $SU(3)$ 群の3次元表現に属する．クォークの反粒子である反クォークは

$$\bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x) V^{\dagger} \quad (5)$$

によって変換する．すなわち，反クォークは3*次元表現に属する．このことより，クォーク3個から，またはクォーク1個と反クォーク1個から，$SU(3)$ 群の1次元表現をつくることは難しくない．これがハドロンである．すなわち“無色”であることは，色の変換群 $SU(3)$ に対して変換しないことを意味する．

ところで，変換(2)で V は時空点 x によらないとした．しかし相対論で考えると，空間的に離れた時空点どうしは互いに全く勝手に V をとれるはずである．そこで，時空点 x に依存する変換 $V(x)$ に対して理論は不変であることを要請する．このようにして構成される理論を，ゲージ理論と総称する．

電磁気もゲージ理論である．このとき変換(2)に現れる $\Psi(x)$ は，例えば電子の場で，1つのディラック場を表す．式(3)の上で述べたことと同じ理由により，$\Psi(x)$ を一成分の複素数と考えてよい．そこで V 自身も一成分で

$$V(x) = e^{i\theta(x)} \quad (6)$$

と表される．すなわち

$$\Psi'(x) = e^{i\theta(x)}\Psi(x) \quad (7)$$

これがよく見なれた電磁気におけるゲージ変換である．一成分のユニタリー変換なので，$U(1)$ ゲージ理論と呼ばれる．このゲージ変換で理論が不変であるためには，以下に述べるように，ゲージ場(電磁場)の存在が不可欠である．自由な電子に対するラグランジアン密度は

$$\mathscr{L} = -\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Psi(x) - m\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \quad (8)$$

で与えられる．ここで γ_μ はディラック行列である．式(8)を(7)に対して不変にするためには，電磁場 $A_\mu(x)$ を導入し，微分を D_μ に置き換え

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Psi(x) \to D_\mu\Psi(x) = (\partial_\mu - ieA_\mu)\Psi(x) \quad (9)$$

ゲージ変換に対して

$$A'_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{e}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\theta(x) \quad (10)$$

と変換することが必要である．こうすると

$$(D_\mu\Psi(x))' = e^{i\theta}D_\mu\Psi(x)$$

となり，式(8)は不変となる．これに，ゲージ場自身のラグランジアンを加えて，電子と電磁場のラグランジアンは

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - \bar{\Psi}(x)(\gamma_\mu D_\mu + m)\Psi(x) \quad (11)$$

となる．ここで $F_{\mu\nu}(x)$ は電磁場テンソルで

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \quad (12)$$

で与えられる．これを量子化したものを，量子電磁気学(QED；Quantum Electromagnetic Dynamics)という．

色電荷に対するゲージ理論を構成するのも全く

同様にできる．式(8)の代わりに

$$\mathscr{L} = -\sum_{i=1}^{N_f} \bar{\Psi}_i(x)\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_i\right)\Psi_i(x) \quad (13)$$

となる．ここで N_f は香り(flavor)の数で，本当は $N_f = 6$ であるが，陽子，中性子などよく知られたハドロンを考えるときは，$N_f = 2$ または3で，uクォーク，dクォークまで，あるいはsクォークまで考えればよい．ここで $\Psi(x)$ は電子のときと異なり，前に述べたように3種類の色に対応するディラック場を含む．m_i はそれぞれのクォークの質量である．式(9)の代わりに

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Psi(x) \rightarrow$$

$$D_\mu \Psi(x) = (\partial_\mu - igA_\mu(x))\Psi(x) \quad (14)$$

となる．ここで，$A_\mu(x)$ は3行3列のエルミートなトレースレス(行列の跡が0)な行列で表される場である．g は電荷 e に対応する結合定数である．$A_\mu(x)$ はトレースレスなので

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^{8} A_\mu{}^a(x)\frac{\lambda^a}{2} \quad (15)$$

と書き表せる．ここで λ^a は，3行3列のトレースレスな8個の線形独立な行列である．λ^a は群 $SU(2)$ のときのパウリ行列 σ^a $(a = 1\sim3)$ に対応し，$\lambda^a/2$ が $SU(3)$ の生成元である．このようにベクトル場は8種類 $A_\mu{}^a(x)$ $(a = 1\sim8)$ 存在する．このベクトル場に対応する粒子をグルーオンと呼ぶ．

クォークとグルーオンのラグランジアン密度は

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} F_{\mu\nu}{}^a(x)F_{\mu\nu}{}^a(x)$$

$$-\sum_{i=1}^{N_f} \bar{\Psi}_i(x)(\gamma_\mu D_\mu + m_i)\Psi_i(x) \quad (16)$$

で与えられる．ここで $F_{\mu\nu}{}^a(x)$ は電磁場テンソルに対応するもので

$$F_{\mu\nu}{}^a(x) = \frac{\partial A_\nu{}^a(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu{}^a(x)}{\partial x_\nu}$$

$$+ g c_{abc} A_\mu{}^b A_\nu{}^c \quad (17)$$

で与えられる．ここで c_{abc} は群の構造定数で

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = i c_{abc}\frac{\lambda_c}{2} \quad (18)$$

で定義される．

このラグランジアン密度から導びかれるハミルトニアンを量子化した理論を，量子色力学(QCD：Quantum Chromo Dynamics)という．すなわちQCDは量子化された $SU(3)$ ゲージ理論である．

4．摂動論によらない定式化の必要性

量子電磁気学(QED)のとき，ハミルトニアンは

$$H = H_0 + eH_1 \quad (19)$$

と書け，H_0 は自由な電子と自由な光子を表し，摂動項 eH_1 は電子と光子の相互作用を表す．$e^2/4\pi\hbar c \sim 1/137$ を展開パラメータとして摂動論を用いて物理量を計算できる．紫外発散の問題はくりこみ理論を用いて，朝永，シュヴィンガー，ファインマン，ダイソン(Schwinger, Feynman, Dyson)らによって解決された．

量子色力学(QCD)のときも，ハミルトニアンは

$$H = H_0 + gH_1 + g^2H_2 \quad (20)$$

と書ける．しかしこの場合は摂動論を用いることは一般的にはできない．摂動論は自由なクォークとグルーオンを基に，その間の相互作用を与える理論である．しかし，クォークとグルーオンは「閉じ込め」られており，自由な粒子として存在しない．これは摂動論を用いることができないことを意味している．

QEDとQCDは理論構造は良く似ているのに，一方には摂動論が適用でき，他方に対しては適用できない理由の1つは，光子は光子同志相互作用しないが，グルーオンはグルーオン同志相互作用する点が挙げられる．式(12)と式(17)を比べるとこの違いがわかる．

摂動論が適用できる場合は，ラグランジアン密度が与えられれば，摂動論の各次数に対応したファインマン図形を生成し，それを計算する処方箋は与えられている．

一方，摂動論が適用できない場合は，理論の出発点まで遡る必要がある．ラグランジアン密度における場の時空の同一点での積 $\bar{\Psi}(x)\Psi(x)$ は紫外発散のため数学的に厳密には定義されていない．例えば $\bar{\Psi}(x+\varepsilon)\Psi(x-\varepsilon)$ のように時空点の

離れた点で積を与え，物理量を計算した後に $\varepsilon \to 0$ の極限をとる必要がある．摂動論を適用できる場合は，この極限操作を先に行うことができる．

数学的にあいまいさなしに 4 次元の場の量子論を定義する 1 つの有力な方法は，離散的な時空点に場を定義し，物理量を計算し，その後に時空点を連続にする極限をとる．離散的として格子点をとったものが，格子場の理論である．

また，量子化の方法として，シュレディンガー，ハイゼンベルクの方法と並び第 3 の方法として，ファインマンによる経路積分の方法がある．場の量子化の方法として，経路積分の方法は非常に有力である．このとき，実時間の代わりに $\tau = it$ なる虚時間を導入した方が数学的に取り扱いやすい．これによって，ミンコフスキー空間は 4 次元ユークリッド空間になる．

5. 4 次元超格子上の QCD

前節までに，クォークとグルーオンの基本法則は量子色力学(QCD)——$SU(3)$ ゲージ理論——であり，非摂動的取り扱いのために，4 次元ユークリッド空間上の格子点上で経路積分を用いて理論を定義する必要性を示した．この理論を格子 QCD という[1),2)]．格子としては，4 次元の単純立方格子をとる．格子間隔を a とする．各格子点は 4 組の整数

$$n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \tag{21}$$

で指定される．クォーク場は格子上の場として

$$\Psi(n) \tag{22}$$

反クォーク場は

$$\bar{\Psi}(n) \tag{23}$$

で与えられる．ゲージ変換に対して

$$\begin{aligned} \Psi(n) &\to V(n)\Psi(n) \\ \bar{\Psi}(n) &\to \bar{\Psi}(n)V^\dagger(n) \end{aligned} \tag{24}$$

と変換する．ここで $V(n)$ は $SU(3)$ 群の元である．

微分にあたるものは，差分 $\Psi(n+\hat{\mu})-\Psi(n)$ である．ここで $\hat{\mu}$ は μ 方向の単位ベクトルである．理論をゲージ不変にするために，微分を共変微分 D_μ に置き換える必要があった．これに対応して，場 $\Psi(x)$ を有限の距離移動させる平行移動子(parallel transpoter) $U_C(x,y)$ を導入する．これは，場 $\Psi(x)$ を点 x から点 y まで経路 C に沿って移動させたときに，ゲージ(目測り)をどれだけ調節すればよいかを示すもので，$SU(3)$ の群の要素である．すなわち

$$\tilde{\Psi}(x) = U_C(x,y)\Psi(y)$$

と定義したとき，場 $\tilde{\Psi}(x)$ は，点 x の場としてのゲージ変換

$$\tilde{\Psi}(x) \to V(x)\tilde{\Psi}(x)$$

を受ける．同じ経路 C を反対向きにもどってきたときには，もとにもどるはずで

$$U_{-C}(y,x) = U_C{}^{-1}(x,y) = U^\dagger(x,y)$$

である．$U(1)$ ゲージ理論では

$$U_C(x,y) = P\exp\left(-ig\int_C A_\mu dx_\mu\right) \tag{25}$$

ととればよい．(9)を用いて証明できる．$SU(3)$ ゲージ理論の場合は，A_μ は式(15)で与えられる行列で，P は経路に沿って，行列 A_μ を順序づけて並べることを意味する(図 1)．

さて，これを格子理論に適用するには，x,y として格子上の点のみを考えればよい．特に隣どうしの点を結ぶ線分をリンクと呼び，そのリンクに対して平行移動子を定義し，これをリンク変数と呼

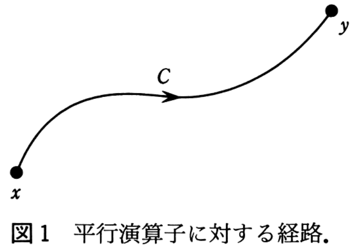


図 1　平行演算子に対する経路．

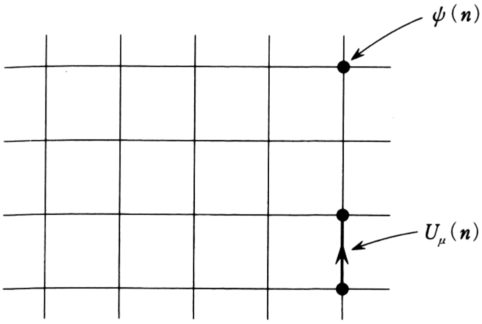


図 2　4 次元格子の 2 次元の断面図．
各サイト（格子点）にクォーク場 $\Psi(n)$ が定義されており，各リンク（ボンド）上に，グルーオン場に対応する変数 $U_\mu(n)$ が定義されている．

ぶ（図 2）．これは点 n と方向 μ によって決まり

$$U(n,n+\mu) \quad \text{または} \quad U_\mu(n)$$

と書く．また

$$U(n+\mu,n) = U^{-1}(n,n+\mu) \tag{26}$$

である．ゲージ変換に対して

$$\tilde{\Psi}(m) = U(m,n)\Psi(n)$$
$$\to V(m)\tilde{\Psi}(m) = V(m)U(m,n)\Psi(n) \tag{27}$$

を得る．一方，$U(n,m)$ のゲージ変換を

$$U(m,n) \to U'(m,n) \tag{28}$$

で表すと，ゲージ変換に対して

$$U(m,n)\Psi(n) \to$$
$$U'(m,n)\Psi'(n) = U'(m,n)V(n)\Psi(n) \tag{29}$$

これと式(27)を組み合わせて

$$U(m,n) \to$$
$$U'(m,n) = V(m)U(m,n)V^{-1}(n) \tag{30}$$

を得る．これが平行移動子のゲージ変換である．

この平行移動子を用いて，グルーオンのラグラ

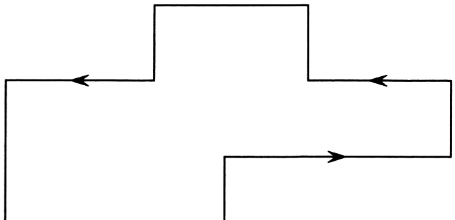


図 3　ゲージ不変量．
任意の閉じたループに沿ってリンク変数の積をとって，そのトレースをとったもの．

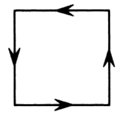


図 4　プラケット

ンジアン $-1/4F_{\mu\nu}{}^aF_{\mu\nu}{}^a$ に対応する部分を求めよう．リンク変動からゲージ不変量をつくらなくてはならない．図 3 のように閉じたループに沿って順序づけて並べた積

$$\mathrm{Tr}\,(P\prod_C U)$$

はゲージ不変であることは，式(30)より簡単にわかる．一番簡単なものは，図 4 のように一番小さな正方形（プラケット(Plaquette)と呼ぶ）に沿った積である．そこで作用として

$$\sum_n \sum_{\mu \neq \nu} \mathrm{Tr}[U(n,n+\mu)U(n+\mu,n+\mu+\nu)$$
$$\times U(n+\mu+\nu,n+\nu)U(n+\nu,n)] \tag{31}$$

をとる．

$$U(n,n+\mu) = \exp(iagA_\mu(n)) \tag{32}$$

と置いて，規格定数を $1/g^2$ ととると，$a\to 0$ でラグランジアンは $-1/4F_{\mu\nu}{}^aF_{\mu\nu}{}^a$ になることがわかる．

次に，クォークに対するラグランジアンを求める．まず，連続時空でのディラック場を格子上で離散化する．

$$-\int d^4x\left(\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_\mu}+m\bar{\Psi}(x)\Psi(x)\right)$$
$$\Rightarrow -a^4\sum_n\left\{\left(\sum_\mu \bar{\Psi}(n)\gamma_\mu\frac{\Psi(n+\hat{\mu})-\Psi(n-\hat{\mu})}{2a}\right)\right.$$
$$\left.+m\bar{\Psi}(n)\Psi(n)\right\} \tag{33}$$

と置き換える．これをゲージ不変にするには，式(27)の性質により

$$-a^4\sum_n\left\{\sum_\mu\frac{1}{2a}\bar{\Psi}(n)\gamma_\mu[U(n,n+\hat{\mu})\Psi(n+\hat{\mu})\right.$$
$$\left.-U(n,n-\hat{\mu})\Psi(n-\hat{\mu})]+m\bar{\Psi}(n)\Psi(n)\right\} \tag{34}$$

とすればよい，

もう一点改善しなくてはならない．それを見るために，フーリエ変換

$$\Psi(n)=\iiiint_{-\pi/a}^{\pi/a} e^{ikna}\Psi(k)\frac{d^4k}{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^4} \tag{35}$$

をする．$U(n)$ がすべての n に対して 1 のとき，すなわち自由なクォークの伝播関数（プロパゲーター）は，運動量表示で，式(33)より

$$\frac{1}{i\gamma_\mu\frac{1}{a}\sin k_\mu a+m}=\frac{-i\gamma_\mu\frac{1}{a}\sin k_\mu a+m}{\left(\frac{1}{a}\sin k_\mu a\right)^2+m^2} \tag{36}$$

で与えられる．一方，これに対応する連続理論の伝播関数は

$$\frac{-i\gamma_\mu k_\mu+m}{k_\mu{}^2+m^2} \tag{37}$$

で $k_\mu{}^2=-m^2$ に極を持ち，質量 m の粒子の伝播を表す．ところが，式(36)は，その極に対応する極以外に，$k_\mu\to k_\mu+\pi/a$ でも極を持ち，全部で $2^4=16$ 個の極を持つ（図 5）．余分な 15 個の極を消すために

$$\sum_n\sum_\mu\frac{1}{2}\frac{r}{a}\bar{\Psi}(n)[\Psi(n+\hat{\mu})-2\Psi(n)+\Psi(n-\hat{\mu})] \tag{38}$$

をつけ加える．連続極限でこの項は

$$\frac{r}{2}a\bar{\Psi}(x)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_\mu{}^2}$$

となり，a のベキを 1 つ含み，形式的に $a\to 0$ で消えるので，つけ加えても連続極限で普通のディラック理論と一致する．これをつけ加えた結果，伝播関数は

$$\frac{1}{i\gamma_\mu\frac{1}{a}\sin k_\mu a+2r\frac{1}{a}\sin^2\left(\frac{k_\mu a}{2}\right)+m} \tag{39}$$

となる．$r\neq 0$ であれば $a\to 0$ の極限で余分な極に対応する粒子の質量は無限大になり寄与しない．式(38)をゲージ不変な形

$$\sum_n\sum_\mu\frac{r}{2a}\bar{\Psi}(n)[U(n,n+\hat{\mu})\Psi(n+\hat{\mu})-2\Psi(n)+U(n,n-\hat{\mu})\Psi(n-\hat{\mu})] \tag{40}$$

に書き直して，式(34)をまとめると

$$a^4\sum_n\left\{\frac{1}{2a}\sum_\mu(\bar{\Psi}(n)(r-\gamma_\mu)U(n,n+\hat{\mu})\Psi(n+\hat{\mu})+\bar{\Psi}(n)(r+\gamma_\mu)U(n,n-\hat{\mu})\Psi(n-\hat{\mu}))-\left(m+4\frac{r}{a}\right)\bar{\Psi}(n)\Psi(n)\right\} \tag{41}$$

となる．$\Psi(n)$ と $\bar{\Psi}(n)$ の規格化を変えて

$$-\sum_n\bar{\Psi}(n)\Psi(n)+K\sum_n\sum_\mu(\bar{\Psi}(n-\mu)(r-\gamma_\mu)U(n,n-\hat{\mu})\Psi(n)+\bar{\Psi}(n+\mu)(r+\gamma_\mu)U(n,n+\hat{\mu})\Psi(n)) \tag{42}$$

と書く．ここで

$$K=\frac{1}{2(ma+4r)} \tag{43}$$

である．K のことをホッピング・パラメータと呼ぶ．これでクォークの作用が求まった．通常 $r=1$ ととる．以下でも $r=1$ ととる．

この方式はウィルソン（Wilson）による．他にコガート・サスカインド（Kogut-Susskind）による方式があるが省略する．

ゆえに，格子 QCD の作用は

$$S=\frac{1}{g^2}\sum_n\sum_{\mu\neq\nu}\mathrm{Tr}[U(n,n+\mu)U(n+\mu,n+\mu+\nu)\times U(n+\mu+\nu,n+\nu)U(n+\nu,n)]-\sum_n\bar{\Psi}(n)\Psi(n)+K\sum_\mu(\bar{\Psi}(n-\mu)(r-\gamma_\mu)U(n-\hat{\mu},n)\Psi(n)+\bar{\Psi}(n+\mu)(r+\gamma_\mu)U(n+\hat{\mu},n)\Psi(n)) \tag{44}$$

となる．

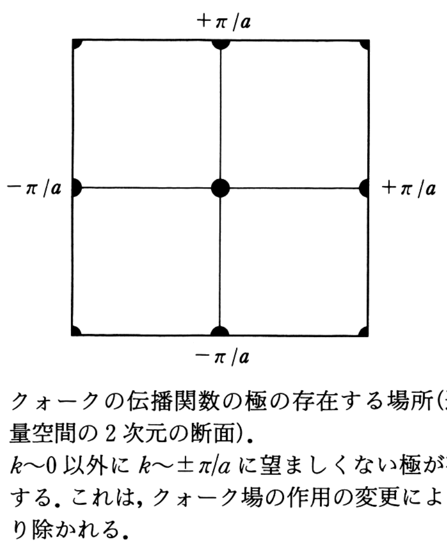


図 5 クォークの伝播関数の極の存在する場所（運動量空間の 2 次元の断面）．
$k\sim 0$ 以外に $k\sim\pm\pi/a$ に望ましくない極が存在する．これは，クォーク場の作用の変更により取り除かれる．

任意のグリーン関数$\langle O\rangle$は，経路積分の方法によって

$$\langle O\rangle=\frac{1}{Z}\int\prod_{\text{link}}dU_l\prod_n d\overline{\Psi}(n)d\Psi(n)Oe^s \tag{45 a}$$

$$Z=\int\prod_{\text{link}}dU_l\prod_n d\overline{\Psi}(n)d\Psi(n)e^s \tag{45 b}$$

で与えられる．ここでリンク変数Uについては各リンクごとに積分を行い，積分の測度(measure)は不変積分測度を用いる．また，クォーク場は反交換関係を満たすグラスマン数の積分である．任意のグリーン関数がわかれば，任意の物理量が計算できる．

6．格子QCDから物理量の導出

前節に述べたように，任意の物理量は式(45)を計算することによって得られる．格子のそれぞれの長さをL_1, L_2, L_3, L_4とし，体積を$V=L_1L_2L_3L_4$とすると，Vが有限であるとき，式(45)は数学的に全くあいまいさなしに定義されている．

QCDは格子QCDで$V\to\infty$の極限をとり，格子間隔$a\to 0$の極限をとって定義される．この極限でローレンツ不変性は回復すると考えられている．

式(45)を解析的に評価するのは難しい．一般には計算機を用いた数値的手法によって求められる．式(45)の形は統計力学のカノニカル分布をしている系の相関関数と数学的構造はまったく同じであり，そこで用いられるモンテカルロ法などが用いられる．

紙幅の関係で詳しい点ははぶくが[3]，ハドロンの質量に関して，計算の精度で実験で求められている値をほぼ再現することができ，これによって格子QCDの正しさが確められた．また，ハドロンの崩壊定数，散乱振幅に関しても数多くの結果が得られている．また，クォーク・グルーオン相からハドロン相への相転移に関しても，相転移の存在及びその次数に関して解明が進んでいる．質量がゼロのクォークの場合，「香り」の数(クォークの種類)が2のときは2次で，3以上6までは1次であることがほぼ確かめられた．更に「香り」の数が7以上の場合はクォークの基本的性質「閉じ込め」が成立しなくなる可能性を示唆する結果も得られている．この結果が確かめられると，現実の物理世界でクォークは「閉じ込め」られているので，クォークの種類は現在発見されている6種類のみで，7番目のクォークは存在しないことになる．

計算機の能力は年々飛躍的に向上している．特に日米欧で各々開発中の格子上の場の理論，特に格子QCD専用超並列計算機を用いて重要な結果が数多く得られることが期待されている．

追記 (1998年12月)

筑波大学を中心に開発された超並列計算機CP-PACSが1996年秋に完成し，15年来の懸案であった，格子QCDのクエンチ近似でのハドロンの質量のほぼ最終的な結果を得た．

クエンチ近似で期待される10%程度の範囲内で実験値と一致し，かつ数パーセントの系統的なずれがあることを確立した．現在，近似なしの計算が進行中である．

参考文献

この小論の性質上，一般的なものを少数にとどめた．

1) 岩崎洋一：「格子ゲージ理論」物理学最前線11，大槻義彦編，共立出版，1985.
2) M. Creutz: Quarks, Gluons and Lattices (Cambridge University Press, Cambridge, 1983)
3) 国際シンポジウム「Symposium on Lattice Field Theory」が毎年開催されており，その会議録が *Nucl. Phys.* B (Proc. Suppl.)から発行されている．

(いわさき・よういち，筑波大学・物理学系)

Ⅱ．素粒子物理と場

超対称理論でのヒッグス粒子

坂井 典佑

1．対称性の自発的な破れとヒッグス機構

光をキャッチボールのように受け渡しすることで，電磁気力は伝わる．弱い力の働く様子を中性子のベータ崩壊で見ると，中性子が陽子とベクトル粒子になり，そのベクトル粒子が電子と反ニュートリノに変わることによってベータ崩壊する．この弱い力を受け渡しするベクトル粒子は電荷を持ち，W 粒子と呼ばれる．ベータ崩壊がゆっくりとしか起こらないのは，W 粒子が重くてなかなかこの反応が起こらないからである．この W 粒子を重くするために必要な粒子がヒッグス粒子である．くりこみ可能なベクトル粒子の場の理論を作るためにはゲージ理論を用いる．ゲージ対称性が成り立つ限り，ゲージ粒子の質量は厳密に零でなければならない．弱い相互作用を媒介する W 粒子は光子と大変よく似た性質を持っているが，陽子の約 100 倍の質量を持っていることが大きな違いである．そこで，ゲージ粒子にどのようにして質量を持たせるかが問題となる．そのため，理論は完全に対称的だが，それを解いて得られる状態が対称的でないという可能性をさがす．これを「対称性の自発的な破れ」と呼ぶ．

場の理論での例として，スカラー場を用いた模型を取り上げてみよう．二つの実スカラー場を考え，図 1 のように中心部が上に凸になったポテンシャルで記述されるとする．このポテンシャルは

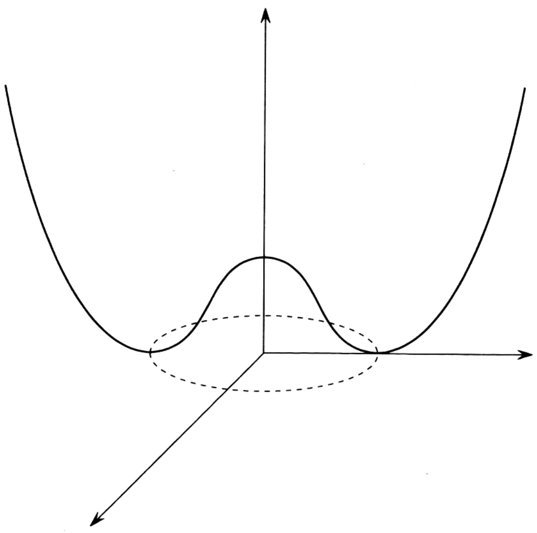


図 1　ヒッグス場のポテンシャル

ふたつの実スカラー場の間の回転について対称である．真空に対するもっとも安定な場の配位をさがそう．まず，運動エネルギーが少ない方が有利だから，場は時空の座標に依存しない．図のようなメキシコ帽子型のポテンシャルでは，場の配位が安定な点はスカラー場の値が零でなく，有限の値の点である．この安定点はポテンシャルの底の円周のどこかになるが，どれを選んでも，一つの点が選ばれるということ自身，回転対称性を破ることになる．すなわち，対称性の破れが自発的に起きている．このように，対称性が自発的に破れると，破れた対称性に対応する変換の方向に，質量零の粒子が必ず存在する．ただし，ゲージ対称

性がある場合だけは例外となる．ゲージ対称性が成り立つと，ゲージ粒子の質量は零のはずだが，対称性の自発的破れが起こったときだけは，自発的破れにともなう零質量粒子と一緒になって，全体として質量を持ったベクトル粒子ができる．これがヒッグス機構と呼ばれるものである．このヒッグス機構を起こすために導入されたスカラー場のことをヒッグス場と呼ぶ．一般に導入されたスカラー場の一部はゲージ粒子に吸収されゲージ粒子の一部になるが，一部は観測される物理的粒子として残る．特に，この物理的粒子として残るスカラー場のことを，狭い意味でヒッグス粒子と呼ぶこともある．

電磁気力と弱い力をまとめて $SU(2)\times U(1)$ というゲージ群で記述できる．これに必要最低限の粒子だけを取り入れたもっとも経済的な模型を標準模型と呼ぶ．標準模型には $SU(2)$ の複素 2 重項のヒッグス場が一つだけ入っている．したがって実数場として四つの場が入っている．その内三つの自由度が正負の W 粒子と Z 粒子の中に吸収されている．その結果，中性のヒッグス粒子が一つだけ物理的粒子として残る．これが標準模型での物理的ヒッグス粒子である．この物理的ヒッグス粒子の質量は，ヒッグス場の自己相互作用の結合定数で決まるので，質量を予言することはできない．また，電磁気力も強い力も働かないので，実験で観測するのは簡単ではなく，物理的ヒッグス粒子はまだ実際に発見されていない．

2．ゲージ階層性問題

現在のエネルギーでの実験データは，標準模型と呼ばれるゲージ理論でよく記述されている．標準模型では強い力は $SU(3)$ というゲージ群で表される．電磁気力と弱い力をまとめて表すのは，$SU(2)\times U(1)$ という群に基づくゲージ理論である．この特徴的な質量スケールは W 粒子の質量であり，陽子の質量の約 100 倍である．低エネルギーでは強い力・電磁気力・弱い力という三つの力の強さは異なっている．標準模型では $SU(3)$ と $SU(2)$ と $U(1)$ という三つのゲージ群があり，やはり三つの異なる強さのゲージ結合定数が残ったままである．しかし，一般に結合定数はエネルギースケールとともに変化する．このようなエネルギーとともに変化する結合定数を有効結合定数と呼ぶ．$SU(3)$ や $SU(2)$ のような非可換なゲージ理論の有効結合定数は高エネルギーで小さくなる．特に，$SU(2)$ よりも，$SU(3)$ の方が，群が大きくゲージ粒子の数も多いので，結合定数の小さくなり方が早い．これに対して $U(1)$ は可換なゲージ理論なので，高エネルギーで有効結合定数は大きくなる．一方，低エネルギーでは強い力を表す $SU(3)$ 結合定数がもっとも大きく，次に $SU(2)$，もっとも小さいのは $U(1)$ の結合定数である．この結果，高エネルギーでちょうど三つのゲージ結合定数が一致する可能性がある．このように三つのゲージ結合定数が一致するという理論が大統一理論である．

現在実験データは $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 標準模型を用いてよく記述されているので，大統一するゲージ群としては，このゲージ群を含む単一のゲージ群を探す必要がある．$SU(5)$ はそのような群であり，これを用いてジョージャイとグラショーが最初の大統一理論を構成した．有効結合定数はエネルギーの対数で変化するだけなので，大統一が起こるエネルギーはたいへん大きなものになる．$SU(5)$ 大統一理論で実際に求めてみると，陽子の質量の 1 億倍の 1 億倍程度のエネルギーになることがわかる．この大統一されるエネルギーが大統一理論の中に入っている基本的なエネルギースケールである．

もしも重力の量子論を考えるとすれば，重力の結合定数である万有引力定数は次元を持った量なので，エネルギースケールを決めることになる．万有引力定数を，量子力学と相対性理論の基本定数を用いてエネルギーに換算すると，大統一のエネルギースケールのさらに千倍から 1 万倍程度のエネルギーとなる．この量子重力のエネルギースケールはプランクエネルギーと呼ばれている．

これに対して，弱い力を媒介するW粒子やZ粒子の質量は陽子の約100倍であることがすでに実験で確認されている．このエネルギースケールは大統一理論や量子重力理論の基本的なエネルギースケールにくらべるととてつもなく小さい．このように，大統一理論や量子重力を考えるときには，理論の基本的なエネルギースケールにくらべてたいへん軽いW粒子などが出てくることを説明できなければならない．つまり，統一ゲージ理論が自然界を説明できるためには，たいへん異なるエネルギースケールを持つ量が理論の結果として，自然に出てこなければならない．統一理論におけるこの問題点は，ゲージ階層性の問題と呼ばれている．

もともとW粒子やZ粒子が重くなったのは，ヒッグス場のポテンシャルが図1の形になって，対称性を自発的に破るからであった．W粒子やヒッグス粒子の質量はこのポテンシャルの底の曲率で決まる．したがって，基本的スケールにくらべて，W粒子の質量を零とみなす極限を考えるということは，ヒッグス場の質量が零の極限を考えることと同じである．スピン1/2粒子の質量が零だと，カイラル対称性が成り立つ．スピン1粒子の質量がないのは，ちょうどゲージ対称性がある場合になっている．逆にこれらの対称性は粒子に質量がないことを保証する．ところが，スピン零粒子に質量がないことを直接保証する対称性は存在しない．

そこで，ゲージ階層性を対称性の観点から説明するために，いままでに二つの解が考えられている．複合ヒッグス粒子と超対称性である．複合ヒッグス粒子の立場では，ヒッグス粒子は基本的な粒子ではないと考えるので，スカラー粒子の質量がないことを説明する必要がない．その代わり，摂動論では説明できない複合ヒッグス模型を具体的に構成してみせるという難問が生じる．この立場については山脇氏の解説「複合模型におけるヒッグスボソン」を見ていただこう．

もう一つの考え方として，もしもスピン零の粒子がスピン1/2の粒子と同じ質量を持つことを保証する対称性があるとしよう．この場合には，スピン1/2の粒子がカイラル対称性を持てば質量が零になるので，同じ質量になるはずのスピン零粒子の質量も零になる．

ヒッグス粒子	ヒグシーノ	(1)
質量零	質量零	
超対称性	カイラル対称性	

量子力学によれば，同種の2粒子は区別できない．粒子の状態を記述する波動関数は，2粒子の入れ替えに対して対称であるか反対称であるかのいずれかだけが自然界に存在し，この性質を粒子の統計性という．粒子のスピンが整数の場合には，対称な状態だけが実現しており，ボース粒子と呼ばれる．一方，スピンが1/2, 3/2, …などの半奇整数の場合には反対称な状態だけが実現しており，フェルミ粒子と呼ばれる．このように，スピンが1/2だけ異なる粒子は異なる統計性を持つ．異なる統計性を持つ粒子の間を結びつける対称性を超対称性と呼ぶ．超対称性によって，ボース粒子の質量とフェルミ粒子の質量が同じになる．超対称性を用いた場合には，ヒッグス粒子は基本粒子となり，大統一理論のエネルギースケールのようなたいへん高いエネルギーまで，摂動論を使って計算できる理論を構成することが可能である．

3. 超対称大統一理論の間接的証拠

大統一理論が正しいとすると，高エネルギーになるにつれて結合定数がどのように変化するかを計算できる．したがって，低エネルギーの実験データを用いてゲージ結合定数が精密にわかれば，大統一理論のアイデアが正しいかどうか，またどの大統一理論がよいかをテストすることができる．ヨーロッパの素粒子実験の中心であるセルンの実験で得られたデータを用いて，高エネルギーへと結合定数を走らせてみよう．超対称性がない最小$SU(5)$大統一理論の場合の結果を示したの

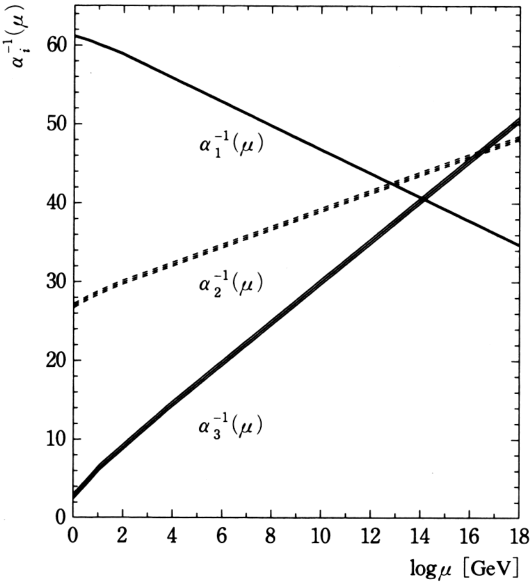


図 2　超対称性を取り入れない場合，有効結合定数は1点で交わらない．

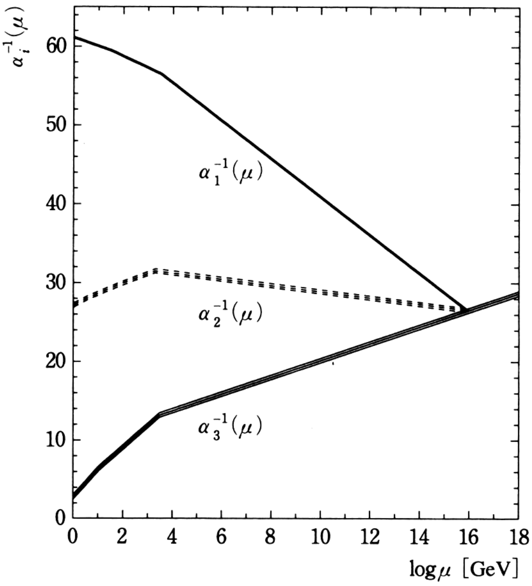


図 3　超対称性を取り入れると，有効結合定数は1点で交わり，超対称大統一理論を支持している．

が図2である．現在の精密な実験結果からは正しくないことがわかる．これに対して図3に示したのは，超対称性を取り入れた最小 $SU(5)$ 大統一理論の場合である．実験データと見事な一致を示している．

ヒッグス粒子はスピン零のボース粒子である．これに対して，クォークやレプトンはスピン1/2のフェルミ粒子である．超対称性を持ったゲージ理論を用いて，物理現象を記述する模型を作ろうとして人々はまず，ヒッグス粒子をクォーク・レプトンの超対称性のパートナーにしようと試みた．しかし，クォークやレプトンは異なる量子数を持ち世代も複数あるので，ヒッグス粒子の数とあわず，このような経済的な模型はうまく行かない．結局，ヒッグス粒子とは別に，クォーク・レプトンにともなう超対称パートナーとして，新しいスピン零の粒子が存在していると仮定するとよい模型ができる．超対称模型を作ろうとするこれらの様々の試みでは，フランスのファイエらが先駆的役割を果たした．

しかし，このような模型作りの初めの段階では，なぜ超対称性を取り入れた模型を考えるとよいのかという点で，特に積極的な理由はなかった．超対称性の必要性が強く認識されるようになったのは大統一理論以後のことで，大統一理論でのゲージ階層性という問題を解決するためであった．ヒッグス粒子は理論の本来の巨大なエネルギースケールにくらべてはるかに小さな質量を持っている．これは，ヒッグス粒子が超対称性によって保護されているので，巨大な質量を持たないのだと説明できる．このアイデアに基づいて1981年頃，ディモプロスとジョージャイ，筆者，ウィッテンらが大統一理論として超対称模型を具体的に構成してみせた．この提案以後，多くの研究者が超対称統一模型を精力的に研究するようになり，急速に発展した．

超対称性を用いた統一理論を具体的に考えてみよう．超対称性があると，すべての粒子には統計性の異なるパートナーがあることになる．クォークやレプトンのパートナーの粒子はスピン零の粒子で，ス・クォーク，ス・レプトンと呼ばれている．ゲージ粒子のパートナーをゲージーノと呼んでいる．ヒッグス粒子のパートナーはスピン1/2の粒子で，ヒグシーノと呼ばれる．

表1 超対称標準模型に含まれている粒子

スピン1	1/2	0
グルーオン	グルーイノ	
光子 Z粒子	ニュートラリーノ	ヒッグス粒子
W粒子	チャージーノ	
		ス・クォーク
		ス・レプトン

ヒッグス粒子は対称性の自発的な破れを起こすだけでなく，クォークやレプトンと結合する．その結果，クォークやレプトンに質量が生じる．この役割を果たすために，超対称理論では，アップクォークと結合して質量を与えるためのヒッグス粒子と，ダウンクォークに質量を与えるヒッグス粒子とが別々に存在しなければならず，標準模型にくらべてヒッグス粒子が2倍必要となる．これはまた，ヒグシーノによって新たに生じるアマノリーの寄与が二つのヒグシーノの間で相殺するためにも必要である．ヒッグス粒子とヒグシーノが二つずつ入った理論を最小の超対称模型と呼ぶ．その結果，標準模型と異なり，観測される物理的なヒッグス粒子として，中性のものだけでなく，電荷を持ったヒッグス粒子が予言される．これが超対称理論でのヒッグス粒子の一つの特徴である．超対称標準模型に含まれている粒子を表1にまとめた．

4．超対称性の破れ

クォークやレプトンは観測されているが，そのパートナーとなるべきスカラー粒子はまだ見つかっていない．このように超対称性は自然界で完全には実現していないが，この超対称性の破れがまったく無秩序ではいけない．もともと，W粒子またはヒッグス粒子が軽いという事実を対称性の観点から説明するために考えられたのが超対称性である．もしも，超対称性がまったく無秩序に破れていたら，例えばヒッグス粒子の質量に対する量子補正はたいへん大きくなってしまい，超対称性を考えた意味がなくなってしまう．そこで，まず考えられたアイデアは，クォークとス・クォークの質量差のような質量次元を持つ項だけで，超対称性が破れているとする考えであった．この場合は，一般に量子補正を計算しても，必ずこの破れのパラメターが入ってくるので，ヒッグス粒子の質量などに生じる量子補正もこの超対称性の破れのパラメター程度以下になり，ヒッグス粒子は軽いままに保護される．このように対称性の破れのパラメターが質量次元を持っている場合を，ソフトな破れと呼ぶ．この考え方を用いて1981年に初めて超対称大統一理論が作られた．

しかし，対称的でないのは，対称性が自発的に破れただけであると考える方が魅力的である．低いエネルギーだけで自発的に超対称性を破る模型を考えても，実際に観測される粒子を説明する良い模型がなかなか作れなかった．今日では，超対称性の破れはかなり高いエネルギーでの理論に原因があるとする考え方がもっとも成功を収めている．この模型では，重力を含む超対称理論，すなわち，超重力理論を用いる．

超対称性の自発的な破れがまだ観測されていない「かくれた粒子」の間で起こっているとしよう．この「かくれた粒子」は，現在観測されているクォーク・レプトンやゲージ粒子・ヒッグス粒子と直接のつながりはないので，超対称性の破れは観測にほとんどかからない．一方，すべての粒子の間に普遍的に重力が働く．重力を通じてのみ，この超対称性の破れがクォーク・レプトンなどの現在観測されている世界に伝わってくる．これがソフトな破れとして見えているのである．重力は粒子の種類を区別しないので，超重力理論を用いると，スカラー粒子の質量はその種類によらなくなる．クォークやレプトンのようなフェルミ粒子だけ軽いのに，それらの超対称パートナーのスカラー粒子がそろって重く，まだ見つかっていない．超重力を用いた超対称性の破れは，この観測事実に自然な説明を与えている．

5. 超対称理論でのヒッグス粒子

超対称統一模型が構成され，超対称性の破れもある程度コントロールできた．超対称理論では，次元のないパラメターはすべて超対称性から決まってしまう．例えば，ヒッグス場のポテンシャルの形を決めるパラメターのうちで，次元のないパラメターはゲージ結合定数によって与えられる．それに対して，ソフトな超対称性の破れというアイデアでは，次元を持ったパラメターには超対称性を破る勝手なものを許してよい．

ヒッグス粒子のポテンシャルが図1のような形をしていると，電弱統一理論の対称性を破ることができる．ポテンシャルの底付近の曲率はスカラー粒子の質量で与えられるので，次元を持ったパラメターの一つである．したがって，ソフトな破れの値がまったく自由なら，図1の形のポテンシャルを構成することは可能であり，電弱統一理論のゲージ対称性を自発的に破ることができる．初めて超対称大統一理論が作られたときには，このようにして，W粒子やZ粒子が陽子の100倍程度の正しい質量を持つように模型を構成できたのであった．

超重力理論を用いて超対称性の破れをコントロールした模型ではスカラー粒子がそろって重くなる．このときには，スカラー場のポテンシャルは下に凸になるので，決して図1の形にはならない．しかし，よく考えると，大統一理論では結合定数はすべてエネルギーとともに変化する有効結合定数である．スカラー粒子の質量というのもそのような有効結合定数の一つのはずである．したがって，スカラー粒子の質量がそろうのは，大統一されるエネルギースケールで成り立つだけであり，ポテンシャルの形はエネルギースケールの変化とともにゆっくりと変化して行く．この変化のありさまは，くりこみ群を用いれば詳しく計算することができる．

ごく最近まで，クォーク・レプトン三世代の中で，トップ・クォークだけはまだ見つかっていなかった．超対称大統一理論が提案された頃，ほとんどの人はその頃までに見つかっていたクォークの質量のパターンから考えて，トップ・クォークは陽子の数十倍程度以下の質量であろうと予想していた．しかし，もしもこのトップ・クォークがもっと重ければ，その質量を与える湯川結合定数が大きいということになり，くりこみ群の結果に大きく影響する．トップ・クォークの質量が陽子の質量の150倍程度であれば，くりこみ群を計算した結果，陽子の質量のちょうど100倍付近のエネルギーで，ヒッグス粒子の質量の2乗が負になって対称性が自発的に破れることがわかる．

このように，ソフトな破れをコントロールした超対称大統一模型で電弱統一理論の対称性の破れを実現するには重いトップ・クォークが必要である．この機構を提唱したのは，井上研三らのグループであった．最近の実験データによって，トップ・クォークが実際に陽子の170倍程度の質量であることが確認された．超対称統一理論で，超対称性の破れをコントロールしようとすれば，重いトップ・クォークが必然的に要求されるということは興味深い事実である．

かくして，最小超対称模型では，超重力理論を用いて超対称性の破れをコントロールするのが標準的な考えとなった．上で見たように，くりこみ群で表される量子効果によって，ヒッグス場のポテンシャルが決まり，電弱統一理論の対称性の破れを実現できる．その結果として出てくる物理的なヒッグス粒子の質量は，ポテンシャルの形で決まっている．したがってヒッグス粒子の質量にはある程度制限が生じる．この結果，パラメターの値をいろいろにとっても，比較的軽い中性のヒッグス粒子がなければならないことが予言される．超対称性がない場合にはヒッグス粒子の質量を予言することがまったくできなかった事実と比較して，この軽いヒッグス粒子があるという予言は超対称理論の大きな特徴の一つである．トップ・クォークの量子効果を取り入れたときも，もっとも軽いヒッグス粒子はかならず陽子質量の150倍程度までに現れることが示された．これは近年，岡

田安弘・山口昌弘・柳田勉と山田篤志らによって得られた研究成果の一つである．また，1重項ヒッグスの存在を許した場合にも，あるエネルギー範囲までにヒッグス粒子が電子・陽電子衝突型加速器で必ず生成されることがわかる．したがって，もしもこうした軽い中性ヒッグス粒子が観測されれば，超対称理論の間接的証拠ということができる．間接的という理由は，超対称性がなくても，中性ヒッグス粒子がたまたま軽いという可能性は排除できないからである．

大統一理論では一般に陽子崩壊が起こるが，超対称大統一理論の場合には新しい特徴がある．超対称性があると，大統一が起こるエネルギーは超対称性がない場合に比して1桁程度大きくなる．したがって，通常の大統一理論の場合に陽子崩壊を起こすXやYというゲージ粒子による効果は，超対称大統一理論では小さくなり，現在考えられている陽子崩壊実験で観測にかからない．ところが，超対称理論では陽子崩壊を起こすもう一つ別の機構があることを，筆者と柳田勉，ワインバーグが見つけた．大統一理論にもヒッグス粒子があり，その中でも $SU(3)$ の色を持ったヒッグス粒子は陽子崩壊を起こす．この色を持ったヒッグス粒子は結合定数が小さいので，通常の大統一理論でも超対称大統一理論でも，ゲージ粒子XやYよりも小さな効果しか陽子崩壊に寄与しない．しかし，超対称理論では，この色を持ったヒッグス粒子のパートナーとして色を持ったヒグシーノがある．重いゲージ粒子やヒッグス粒子では，崩壊確率はその質量の4乗に逆比例するが，ヒグシーノの場合には崩壊確率はその質量の2乗に逆比例するだけである．したがって，ゲージ粒子Xが重いことで抑制されているはずの陽子崩壊に，図4のようにこのヒグシーノは大きく寄与する．その一方で，結合定数は小さいので，ちょうど実験にかかるかも知れない程度の陽子崩壊を起こすことになる．

現在までの神岡鉱山の実験データからは，まだ陽子崩壊は検証されていない．しかし，この超対称性を持った最小 $SU(5)$ 大統一理論が正しければ，神岡鉱山での実験によってもうすぐ陽子崩壊が観測されるはずである．したがって，超対称最小 $SU(5)$ 大統一理論に限れば，もうすぐ実験的決着がつくと思われる．仮りに神岡鉱山実験で，最小超対称 $SU(5)$ 大統一理論の陽子崩壊の予言が実現していなかった場合には，最小でない理論や超弦理論などを考えることになる．その場合にも，ここで述べた陽子崩壊の機構は一般に成り立つ．

最後に，超弦理論との関係についても触れておこう．超弦理論は，重力を含む発散のない理論で

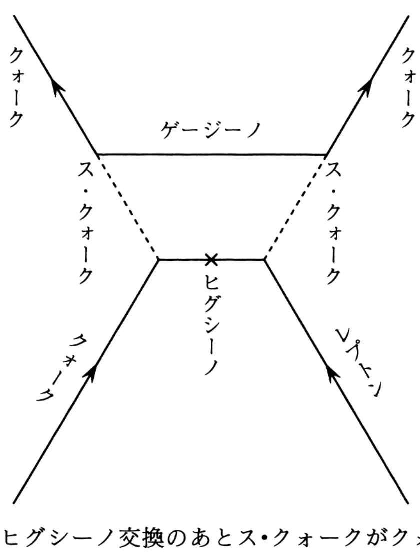


図4 ヒグシーノ交換のあとス・クォークがクォークに変わって陽子崩壊をひき起こす．

あると考えられており，重力を含むすべての力の統一を果たすもっとも有力な候補である．したがって，超弦理論を解くことができれば，重力を含むすべての力と物質とを統一的に理解することができると期待されている．いまのところ，超弦理論の理解は十分ではなく，まだ超弦理論から低エネルギー物理現象の予言を導くことはできていない．いままでいくつかの近似によって，超弦理論の低エネルギーでの有効理論がさまざまに予想されている．それらの予想では，低エネルギーでのゲージ群が $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ またはそれを少し拡張したゲージ群となる点が共通している．多くの予想では，有効理論が超対称大統一理論となる場合が考えられている．その一方で，超弦理論の解の可能性として，高エネルギーになっても大統一はしないで，$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ のような低エネルギーのゲージ群がプランクエネルギーというスケールまで到達し，直接量子重力につながってしまうという可能性を予想するものもある．このように，超弦理論の低エネルギー有効理論としては，まだいろいろな可能性がある．しかし，少なくとも陽子の 100 倍程度のエネルギーから大統一または量子重力のエネルギースケールまで超対称性が成り立つであろうという点が，これらの予想に共通している点である．したがって，超弦理論の場合でも，これまで考察してきた超対称理論でのヒッグス粒子と同様の粒子がでてくると期待されている．

（さかい・のりすけ，東京工業大学・理学部）

II. 素粒子物理と場

量子論とトポロジー

筒井 泉

1. はじめに：Dirac Monopole

量子論とトポロジーは一見何の関係もない独立の概念のように見えるかもしれない．しかし現実には，トポロジーの概念の応用があってはじめて量子レヴェルでの物理が正しく理解される場合も多い．様々な量子現象の背後にトポロジーによる効果が潜んでいるのである．その基本的な機構をいくつかの初歩的な例をあげて説明するのが，この稿の目的である．

トポロジーとは，対象の大域的な(連続的変形によって変わらない)性質のことである．例えば餅と団子とは姿は異なるが，連続的に変形することによって同じ形にこねあげることができる．つまりこれらの表面は球面 S^2 と大域的に等しい(同相である)．これに対し，ドーナツはどんな連続的変形をしても団子の形にはならない．穴があるからである．即ちドーナツはトーラス $S^1 \times S^1$ と同相であり，球面 S^2 とは大域的性質を異にする．(われわれ人間はこのトーラスと同相らしい！)

トポロジーはこのような曲面に限らず，写像をもその対象にすることができる．例えば円周 S^1 から別の円周 S^1 への写像を考えてみよう．はじめの S^1 の座標を $0 \leqq \theta < 2\pi$ とし，あとの S^1 を複素平面上の単位円とすれば，$f_n(\theta) = e^{in\theta}$ は任意の整数 n に対しこのような写像の例となっている．θ を動かして複素平面上でこの写像の軌跡を追ってみると，単位円上で反時計廻りに n 回廻ることがわかる．より一般の写像 $f(\theta)$ も，同様に単位円上を(行きつ戻りつしながらも)何度か廻り，その軌跡はちょうど単位円上に輪ゴムを何度か廻して引っ掛けた格好になっている(図1)．この場合，写像の連続的変形とはその輪ゴムの伸長，収縮を行うことに他ならないから，それによって単位円上の巻き数 n は変わらない．したがって写像 $S^1 \mapsto S^1$ の大域的性質はその巻き数(winding number)

$$n = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{f(\theta)} \frac{df(\theta)}{d\theta} d\theta = \frac{1}{i}\int_{S^1} f^{-1} df \tag{1}$$

で特徴づけられる．この性質は，数学的には基本群 $\pi_1(S^1) = \boldsymbol{Z}$ ($\boldsymbol{Z}$ はすべての整数からなる群)と

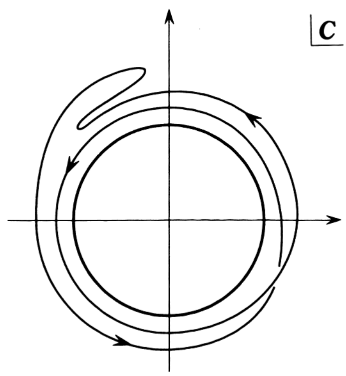


図1 写像 $f(\theta)$ の複素平面上での軌跡．この $f(\theta)$ の巻き数は $n = 2$．

いう形で表現される．

物理でトポロジーを問題とするのは，多くこの後者の写像の意味においてである．4 次元球面 S^4 上の $SU(2)$ Yang-Mills 古典解であるインスタントンはその代表例であり，その大域的性質を特徴づける指数は

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^4} \mathrm{tr}\, F^2 = 1$$

である．ある境界条件のもとで，この指数は S^3 から $SU(2)$ への写像 f の巻き数(写像度)

$$n = \frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3} \mathrm{tr}(f^{-1}df)^3 \qquad (2)$$

と関係づけることができるから，インスタントンのトポロジー的性質は数学的には $SU(2)$ のホモトピー群の性質 $\pi_3(SU(2)) = \boldsymbol{Z}$ によっていることになる．この他，キンク解などのある種のソリトンには大域的な性質があり，それが安定性を保証していることは良く知られている．これらはいずれも古典論でのトポロジーの問題である．それでは，このようないわば古典的なトポロジーがどうして量子論とかかわってくるのであろうか？

1931 年に Dirac の提案した磁気単極子(Dirac Monopole)[1] は，トポロジーが量子論において重要な意味を持ち得ることを最も印象深く指し示すものである．以下，どのような機構によって系の大域的性質が量子論に影響を及ぼすかを，この磁気単極子を例に議論してみよう．まず，磁荷 g の磁気単極子が存在したとする．そのとき，その磁気単極子のつくる磁場

$$\boldsymbol{B} = g\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

のもとでの電荷 e，質量 m の粒子の運動を考えてみることにする．そのようなラグランジアンは通常の最小相互作用の形

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}, \quad \left(\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) \qquad (3)$$

で与えられ，ここで $\boldsymbol{A}$ は磁場 $\boldsymbol{B}$ に対するベクトルポテンシャルで $\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ を満たすものである．明らかに，このようなベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は(磁気単極子の位置する点を除いても)全空間で正則ではあり得ない．もしそうなら，磁気単極子から出る全磁束をそれを取り囲む球面 S^2 で積分して計算したとき，Stokes の定理から

$$4\pi g = \int_{S^2} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S^2} \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial S^2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

となって磁荷 $g = 0$ でない限り矛盾してしまうからである．(球面 S^2 には境界 ∂S^2 がない．) だから少なくとも何らかの‘線’が磁気単極子から外に伸びており，その線上では $\boldsymbol{A}$ が特異性を持たねばならない．実際，磁気単極子が原点にあってその特異線(Dirac string)が原点から例えば z 軸の上方に伸びているようなベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = g\left(\frac{-y}{r(r+z)}, \frac{x}{r(r+z)}, 0\right) \qquad (4)$$

という形で与えることができる．磁場 $\boldsymbol{B}$ を変えないでこの特異線の位置を移動させるには，ゲージ変換 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}-\nabla\theta$ を行えばよい．(もともと系は球対称だから特異線の位置を回転したベクトルポテンシャルを用いても同じ磁場を与えるはずであり，したがってこれらの回転で得られるすべてのベクトルポテンシャルはゲージ変換によってつながっている．) このため古典論では特異線は物理的に意味はなく，その存在は問題とならないと考えられる．実際，ラグランジアン(3)はこのゲージ変換のもとで時間微分の部分を除いて不変

$$L \to L - e\dot{\theta} \qquad (5)$$

であり，運動方程式には影響を与えず特異線を動かせるからである．ところが面白いことに量子論ではこの状況は一変する．

いま，ここで量子化を経路積分を用いて行ったとしよう．経路積分では，粒子が時刻 $t = 0$ から $t = T$ の間に点 P_1 から P_2 へ遷移する確率振幅は，作用 $I = \int_0^T L$ を $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$(h は Planck 定数)で割ったものから定義した位相因子 $e^{iI/\hbar}$ を，与えられた境界条件を満たすすべての経路 $\boldsymbol{r}(t)$ について和をとることによって求まる：

$$Z = \sum_{\text{all paths}} e^{iI[\boldsymbol{r}]/\hbar}. \qquad (6)$$

(5)より，この確率振幅にゲージ変換を行うと，

全体にある位相がかかる($Z \to e^{ie(\theta(T)-\theta(0))/\hbar}Z$)ことがわかるが，もともと遷移確率はこの振幅の絶対値から求まるから，これは一向に構わない．しかし真の問題は，経路の和の中の相対位相因子がこのゲージ変換のもとで保たれるかどうか，ということである．なぜなら経路積分ではその全体にかかる位相因子はどうでもよいが，その各々の経路の間の相対位相因子は重要であるからである．この問題を調べるために，いまかりに2点P_1とP_2が半径$r=1$の球面上にあるとし，その2点を球面上でつなぐ図2のような非常に接近した二つの経路$\boldsymbol{r}_a(t)$, $\boldsymbol{r}_b(t)$を考えよう．$I[\boldsymbol{r}_a]$, $I[\boldsymbol{r}_b]$をそれぞれの経路に対する作用とすると，それらの間の相対位相因子$e^{i\Delta}$(位相因子の差)は

$$e^{i\Delta} = \frac{e^{iI[\boldsymbol{r}_a]/\hbar}}{e^{iI[\boldsymbol{r}_b]/\hbar}} = e^{i(I[\boldsymbol{r}_a]-I[\boldsymbol{r}_b])/\hbar} \qquad (7)$$

で与えられる．二つの経路のt依存性を運動エネルギーについては常に等しくなるように取ってやれば，相対位相Δに寄与するのはラグランジアン(3)のうち第二項の相互作用の部分のみとなるので，Stokesの定理を使って

$$\Delta = \frac{e}{\hbar}\int_{r_a} \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}dt - \frac{e}{\hbar}\int_{r_b} \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}dt$$
$$= \frac{e}{\hbar}\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{e}{\hbar}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (8)$$

となる．ここでSは二つの経路$\boldsymbol{r}_a(t)$, $\boldsymbol{r}_b(t)$で囲まれる球面上の領域である．即ち，この場合この二つの経路間の相対位相は領域Sを貫く磁束に比例することがわかった．二つの経路は非常に接近しているからこの領域Sは非常に狭く，したがってもし領域Sの中で$\boldsymbol{A}$が正則ならその接近した極限では相対位相Δは0になるだろう．

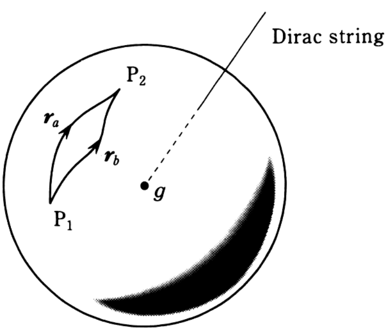


図2　半径$r=1$の球面上でP_1からP_2に遷移する二つの経路$\boldsymbol{r}_a$, $\boldsymbol{r}_b$.

ところが，そもそもゲージ変換によって特異線の位置を自由に動かせるのだから，量子論におけるゲージ不変性は特異線の位置にかかわらず相対位相は常に一定(いまの場合，かりに特異線がその領域S中に存在したとしても$\Delta=0$)とならなければならないことを要請しているかに思える．磁気単極子のもとではこれは明らかに不可能である．実際，特異線がその二つの経路で囲まれる狭い領域中に存在する場合には，Stokesの定理を使うためにはSとして特異線のない方の側，つまり球面からその狭い領域を除いた外側のほとんど球面全体の領域を取らねばならないから，極限では相対位相(8)は

$$\Delta = \frac{e}{\hbar}\times 4\pi\ (\text{球面積})\times g\ (\text{磁場}) = \frac{4\pi eg}{\hbar} \qquad (9)$$

となり，$g=0$でない限り$\Delta=0$にはならない．しかし，ここにうまい逃げ道がある．つまりΔは0でなくとも2πの整数倍であれば，経路積分では位相因子$e^{i\Delta}$の形で寄与するだけだから影響はないはずである．したがって，もし

$$eg = \frac{n\hbar}{2} \qquad (10)$$

であれば，磁気単極子の存在とゲージ不変性とは量子論においても抵触しないことになる．これが有名なDiracの量子化条件——ある磁荷gの磁気単極子のもとでは量子化された電荷eのみが許される——である．

この経路積分による相対位相因子のゲージ不変性の要請は，波動関数を用いた場合には配位空間での一価性の要請に等しくなる．言い替えれば，上の磁気単極子におけるトポロジーの議論は，系の配位空間(この場合，3次元ユークリッド空間$\boldsymbol{R}^3$から磁気単極子のある原点を取り除いたもので，トポロジーとしては実質的にS^2と同じ)から波動関数の空間(Hilbert空間)への写像の大域的性質を考察したものなのである．このように，一般に量子論では配位空間から波動関数の空間への

写像のトポロジーが問題となり，これには古典的な配位空間のトポロジーが重要な要素になる．

磁気単極子はこれまでのところその存在が実験的に確認されてはいないが，このように古典的な概念であるトポロジーが量子論において重要な意味を持ち得る，ということはDiracの非常な卓見であり，この例は，その後今日まで半世紀以上の間，様々な大域的構造に依存する現象を議論する際の手本となってきた．そのような現象としては，例えば量子力学系では幾何学的位相(geometric phase または Berry's phase)，量子ホール効果，エニオン(anyon)などが最近話題となったし，また Yang-Mills 場の量子論では，前に述べたインスタントンが θ 真空と呼ばれる真空構造を生成することは良く知られている．これにカイラルなフェルミオンが加わると一般に量子異常(chiral anomaly)が生じるが，これも同様な配位空間のトポロジーの性質が背後にある．この他，超弦理論や重力理論でも基本的にトポロジーからの考察は重要になりつつあり，さらに極端な場合として，トポロジーのみが意味を持つ位相的場の理論というのも最近注目されたトピックの一つである[2]．しかし本稿ではもう一度基礎に戻ることとし，ここで議論した Dirac の磁気単極子の例に倣って，配位空間のトポロジーが非自明であるときに，そこで構成された量子論がどのような整合性を要求し，またどのような物理的帰結が得られるかを，できるだけ単純な設定で述べることにしよう．

2．等質空間上での量子論

2.1　S^1 上の量子論

非自明なトポロジーを持つ配位空間のうち最も簡単なものは円周 S^1 であろう．まず手はじめに，再び経路積分を用いてその S^1 上での量子論がどのように構成されるかを考えることにする[3]．

前と同様に，時刻 $t=0$ から $t=T$ の間に点 θ_1 から θ_2 へ遷移する確率振幅を考えることにしよう(図3参照)．そのような遷移を起こす任意の

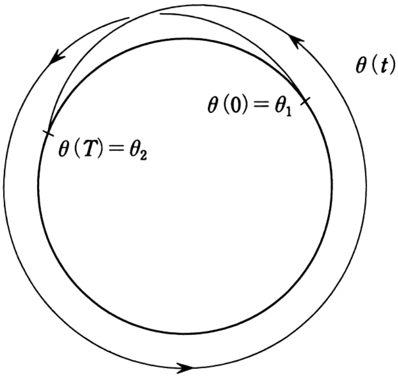


図3　θ_1 から θ_2 に遷移する経路．この $\theta(t)$ の巻き数は $w(\theta(t))=1$．

経路 $\theta(t)$ に対し，前節にならって巻き数 $w(\theta(t))$ を

$$
\begin{aligned}
&w(\theta(t))\\
&\quad=[\theta=0\text{ を反時計廻りに通過した回数}]\\
&\qquad-[\theta=0\text{ を時計廻りに通過した回数}]
\end{aligned}
\tag{11}
$$

で定義する．さて，同じ巻き数を持つ二つの経路

$$w(\theta_a(t))=w(\theta_b(t))$$

間の相対位相は，Dirac の磁気単極子の場合と同様にその二つの経路を接近させた極限で0(あるいは 2π の整数倍)になることが必要である．しかし異なる巻き数を持つ経路どうしは連続的に互いに他に移れないから，それらの間の相対位相に上のような要請をする根拠はない．つまり，異なる巻き数 $w(\theta(t))=n$ ごとに特有な位相が許されるわけである．それを δ_n とすれば遷移確率振幅は

$$Z=\sum_n e^{i\delta_n}\sum_{\text{all paths}}^{w(\theta)=n} e^{iI[\theta]/\hbar} \tag{12}$$

と書くことができる．最初の因子 $e^{i\delta_n}$ が系が円周 S^1 であることによって許された特別な部分である．この因子を決定するために，巻き数 n の経路の終点 θ_2 を時計廻りに動かして遷移確率振幅 Z がどうなるかを考えてみよう．終点 θ_2 が動くにつれて Z も変化するが，ちょうど一回りしてもとの θ_2 に戻ったときには Z はほとんど元の(12)式に戻る．ただしこの過程で巻き数 n を一巻き解いたからその経路の巻き数は $n-1$ になっており，実

質的に Z は最初の因子 $e^{i\delta_n}$ が $e^{i\delta_{n+1}}$ に置き換わったものになっている．ところがこの両方の表式とも正しく遷移確率振幅を与えるはずなのだから，その両者がある位相因子 $e^{i\alpha}$ を除いて等しくなければならない：$e^{\delta_{n+1}} = e^{i\alpha}e^{\delta_n}$．全体にかかる位相因子はいつでも自由にとれるからそれを利用して $e^{i\delta_0} \equiv 1$ とすれば，巻き数 n に固有な位相因子は結局 $e^{i\delta_n} = e^{in\alpha}$ と表せることがわかる．

量子化に伴い生じた経路積分の角度パラメーター $0 \leqq \alpha < 2\pi$ は，実はそのまま波動関数の言葉に直せば境界条件 $\psi(2\pi) = e^{i\alpha}\psi(0)$ を意味し，波動関数の一価性を $\alpha = 0$ でない限り破ってしまう．これを避けるためには一価性を満たすように波動関数に適当な位相因子をかけて再定義してやればよいが，そうすると今度は元の Schrödinger 方程式が変更されて実効的にゲージ場との相互作用が誘起される．同様に，経路積分で位相因子 $e^{in\alpha}$ を避けるためには，巻き数 $w(\theta(t)) = n$ の経路に対して成り立つ関係

$$n = \int_0^T \dot{\theta} dt - (\theta_2 - \theta_1)$$

を使ってその位相因子を作用の方に繰り入れてしまえば良い．すると遷移確率振幅は通常の形になるが，その代わり作用が

$$I \to I + \hbar \int_0^T \alpha \dot{\theta} dt \tag{13}$$

と変わり（定数値ではあるが）ゲージ場 $A = \hbar\alpha$ と円周上の粒子の最小相互作用型の付加項が現れる．以上のことから円周 S^1 上での量子論では，古典的には存在しなかったゲージ場が実効的に誘起されることがわかった．（因子 $\hbar$ の存在はこれが量子論的起源を持つことを示唆している．）一般にこのような現象は，系の配位空間 Q が $\pi_1(Q) = \boldsymbol{Z}$ のとき，つまり穴があいているときに生ずる．

いまこの円周 $Q = S^1$ が平面に埋め込まれたと想定すると，この定数ゲージ場はその円周の中心を磁束 $\Phi = 2\pi\alpha$ が貫いているときのものと等しいから，ここで述べた状況は良く知られた Aharonov-Bohm（A-B）効果の設定を再現していることになる．A-B 効果は実験的に検証されているから，もしかするとこの S^1 上の量子化に伴うパラメーター α の存在も検証可能であるかもしれない[a]．

2.2　等質空間上の量子化

経路積分の方法は，配位空間が S^1 のときにはそのトポロジーの影響が直観的に把握できるので，それを量子論の上に載せるのに大変便利であった．しかし残念ながら，より一般的な配位空間にはこの経路積分の正しい適用の仕方がわかっていないのが現状である．そこで以後演算子形式によって，量子化への配位空間のトポロジーの影響を考えることにする．

非自明なトポロジーを持つ配位空間に対する量子化は，実はかなり古いトピックである．というのも，1960 年代には既に数学者の Mackey によって等質空間上での量子化が議論されているからである[4]．その対象の等質空間とは，適当な Lie 群 G およびその部分群 H によって $Q \simeq G/H$ の形（Q が coset space G/H と同相）に表せるもので，そのような空間ではどの 2 点をとってきてもそれを繋ぐ群 G の写像が存在するのが顕著な点である．言い替えれば，その空間中の各点がその写像のもとで平等，つまり空間は‘等質’なのである．例えば n 次元球面 S^n は

$$S^n \simeq SO(n+1)/SO(n)$$

であるから等質空間であり，その写像は $(n+1)$ 次元回転である．もちろん，ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ もそれ自身 n 次元の平行移動の群と同相だから，例えば $\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^n/\{0\}$ とみなせば等質空間となる．物理ではこのような質的に一様な空間を対象とすることが多いから，配位空間の対象を等質空間に限ることはさほど強い限定ではない．

さて Mackey の掲げた課題は，配位空間がユー

a）もし A-B 効果の設定で，本当に磁束中への電子の侵入が禁止されているならば，その電子の配位空間のトポロジーは実効的には S^1 となり，ソレノイド中の磁束と誘起された磁束の和が観測されるはずである．しかし誘起された磁束の部分はその大きさを自由に変えられないから電子線の干渉縞の移動には寄与せず，この部分の有無を検証するのは難しい．

クリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ であるとき確立している正準量子化の方法を如何にして等質空間 $Q \simeq G/H$ 上に自然に拡張するか，ということであった．まず，$\boldsymbol{R}^n$ 上での正準量子化とは一体何であるのか，ということを吟味してみることから始めよう．$\boldsymbol{R}^n$ 上での量子論では，その基本的な観測量の組は座標演算子 $\hat{q}^i$ および運動量演算子 $\hat{p}_i$ である（$i = 1, \cdots, n$)．これらはエルミート演算子であって，正準交換関係

$$[\hat{q}^i, \hat{q}^j] = 0,\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0,\ [\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta^i_j \tag{14}$$

に従う．これらの演算子から定義されるユニタリー演算子

$$U(a) = e^{-ia\cdot\hat{p}/\hbar},\ V(b) = e^{ib\cdot\hat{q}} \quad (a, b \in \boldsymbol{R}^n)$$

を使うと，(14)の正準交換関係は次の Weyl 関係と呼ばれるものになる：

$$\begin{cases} U(a+b) = U(a)U(b), \\ V(a+b) = V(a)V(b), \\ U(a)V(b)U^{-1}(a) = e^{-ia\cdot b}V(b). \end{cases} \tag{15}$$

この代数関係の(配位空間 $\boldsymbol{R}^n$ 上の自乗可積分関数の空間 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 上への)表現として通常用いられているのが Schrödinger 表示

$$\begin{aligned} (U(a)\psi)(q) &= \psi(q-a), \\ (V(b)\psi)(q) &= e^{ib\cdot q}\psi(q) \end{aligned} \tag{16}$$

である．ここで重要なことは，Weyl 関係(15)のユニタリー既約表現としては実質的にこの表現しか存在しない，という一意性(Stone-von Neumann の定理)で，このお蔭で Schrödinger 表示さえ知っていれば $\boldsymbol{R}^n$ 上の量子化は事足りたわけである．

さて，これから $\boldsymbol{R}^n$ から等質空間 G/H 上への拡張を考えるため，この(15)のうち第一式と第三式に注目しよう．$U(a)$ は $\boldsymbol{R}^n$ 上での平行移動のユニタリー変換を行う演算子であるから，Schrödinger 表示はこの平行移動の群のユニタリー表現((15)の第一式)にもなっている．(15)の第三式は，座標からなる演算子 $V(b)$ に対するそのユニタリー表現の作用を規定したもので，簡単にわかるように $V(b)$ の中の座標演算子 $\hat{q}$ に対する平行移動となっている．つまり第三式は，平行移動の群 $\boldsymbol{R}^n$ が等質空間 $\boldsymbol{R}^n$ に起こす写像をそのユニタリー表現によって実現する要請である．以上の考察を基にして，Mackey は等質空間 G/H 上では群 G の何らかのユニタリー表現 $U(g)$ ($g \in G$),

$$U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2) \tag{17}$$

が存在し，それが座標演算子から成る任意の演算子 $V(q)$ ($q \in G/H$) に対して等質空間上での群 G の写像 $g^{-1}q$,

$$U(g)V(q)U^{-1}(g) = V(g^{-1}q), \tag{18}$$

を行う，という基本量子関係の設定を提案した．これら(17)，(18)は確かに $Q = \boldsymbol{R}^n$ のときの(15)の第一式と第三式に対応しており，Weyl 関係(正準交換関係)の自然な等質空間 $Q \simeq G/H$ への拡張ということができる．さて，問題はこれらの関係を実現する表現は存在するか，そしてそれはどのようなものか，ということである．

この問題は Mackey 自身によって解かれた．即ち，誘導表現(部分群 H のユニタリー既約表現から群 G のユニタリー表現を‘誘導’する構成法)の手法を用いてユニタリー表現 $U(g)$ を

$$\begin{aligned} &(U(g)\psi)_\mu(q) \\ &\quad = \sum_\nu \pi^\chi_{\mu\nu}(h_\sigma(g, g^{-1}q))\psi_\nu(g^{-1}q), \end{aligned} \tag{19}$$

で定義すれば，上の関係(17)，(18)を確かに満足することを示すことができる．ここで波動関数 $\psi_\mu(q)$ についた添字 μ は，用いた H のユニタリー既約表現 χ の空間に属するベクトルである．($\pi^\chi_{\mu\nu}(h_\sigma(g, g^{-1}q))$ はその空間での‘回転因子’であるが，その詳細は今は重要でない．）また逆に，この誘導表現が関係(17)，(18)を満たすすべてのユニタリー表現を尽くしていることも示せる．この結果，量子化の基本関係の表現はもはや一意ではなく，部分群 H のユニタリー既約表現 χ の数(したがって一般に無限個！)だけ存在することになった．この事情は $Q = \boldsymbol{R}^n$ の場合その Weyl 関係の表現が Schrödinger 表示で尽きていたことと著しい対照をなしている．前に経路積分を用いて考察した $Q = S^1$ の量子論でもパラメータ α

が無限個の表現をラベルしていたことと合わせて[b]，この結果は，一般に非自明なトポロジーを持つ配位空間上ではその量子論（が構成されるべきHilbert 空間）は多（無限）種類存在し，それらは配位空間の大域的性質を表すパラメーターでラベルされることを示唆している．

しかし，一体その各々の量子論ではどのように物理が異なるのであろうか？　まず明らかに，取り扱うべき波動関数がベクトルの添字を持つことから，考えている等質空間上での粒子がそれに相当する自由度を持っていることがわかる．例えば，もし H が $SU(2)$ であれば，そのユニタリー既約表現はスピンの大きさでラベルされ，そしてその自由度はスピンそのものである．だから一般にこのようなベクトル波動関数には，一般化されたスピンの自由度が付随していると考えることができるだろう．そしてそのスピンの‘大きさ’が量子論ごとに異なるわけである．さて物理が異なるのはこのスピンの自由度だけではない．もう一つのより重要な物理的効果が次に述べるゲージ場の出現である．

2.3　誘起されるゲージ場

Mackey の仕事から四半世紀以上も経った1991年になって，Landsman と Linden の二人がその物理的意義について興味深い考察を行った[5]．それは一言でいえば，円周 S^1 上で観察されたゲージ場と同様のものが一般の等質空間 G/H 上でも現れ，したがって粒子の運動もそれによって影響され古典論のものとは異なる．またそのゲージ場との結合定数は量子化され，量子論をラベルする H の表現 χ によって決まる，というものである．実際，この等質空間上での‘自由粒子’のハミルトニアンを構成し，それをベクトル波動関数の上で表現してみると，正準接続（H-connection）と呼ばれる，ある特徴的なゲージ場が誘起されているのがわかる．この正準接続は等質空間 G/H 上での Yang-Mills 解になっており，その曲率は G の構造定数に比例するものである．

ここでこの Landsman-Linden の考察を詳しく説明する紙数はないから，別の方法を用いて得られた量子論的有効ラグランジアンを掲げるにとどめ，それが意味するところの物理的効果について要点を述べよう．そのため，まず等質空間 G/H から群 G への（section と呼ばれる）写像 $\sigma: G/H \mapsto G$ を定義し，これを用いて群 G に値を持つ自由度 g を $g = \sigma(q)h$ $(h \in H)$ と分解する．すると有効ラグランジアンはこれらによって次のように表せる：

$$L_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q)\, \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} - \hbar \operatorname{tr} K(h^{-1}\dot{h}) - \hbar \operatorname{tr}(hKh^{-1}A_{\alpha}(q))\, \dot{q}^{\alpha} \tag{20}$$

ここで $g_{\alpha\beta}(q)$ は $\sigma(q)$ から定まる G/H 上の計量であり $(\alpha = 1, \cdots, \dim(G/H))$，したがって第一項は等質空間 G/H 上の自由粒子の通常のラグランジアンである．一方 K は整数の組からなる行列であり，それらは H の表現 χ をラベルする組と対応する．また $A_{\alpha}(q)$ は誘起された正準接続で，やはり $\sigma(q)$ から定まる．この後の二つの項は量子化に伴って生じた効果を表しているが，その内容は粒子が（非可換）群 H に基づくゲージ場と最小相互作用をしているもので，よく知られている Wong の系と呼ばれるものと実質的に等しい．つまり，結果として S^1 上の量子論で観察されたこと――ゲージ場の誘起と最小相互作用の生成――がやはり一般に等質空間 G/H 上でもみられたのである．

この最小相互作用の量子論的な誘起は，当然それに伴うゲージ対称性の存在を意味する．実際，任意の $\tilde{h} \in H$ に対しゲージ変換

$$A_{\alpha} \to \tilde{h}^{-1} A_{\alpha} \tilde{h} + \tilde{h}^{-1} \partial_{\alpha} \tilde{h}, \quad h \to \tilde{h}^{-1} hs$$

のもとで，有効ラグランジアン L_{eff} は

$$L_{\mathrm{eff}} \to L_{\mathrm{eff}} - \hbar \operatorname{tr} K(s^{-1}\dot{s}) = L_{\mathrm{eff}} - \hbar \frac{d}{dt}(K_r \theta_r) \tag{21}$$

となり時間微分の部分を除いて不変である．ただ

b）　$S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ とみなすことによってこの $Q = S^1$ の経路積分での結果を Mackey の方法で再現することができる．このとき，群 $\boldsymbol{Z}$ のユニタリー表現をラベルするのが α である．

しここで s は $\tilde{h}$ によって決まるもので群 H の極大トーラス部分群に属し，その Lie 代数の基底 (Cartan 部分代数)を用いて $s = e^{\theta_r T_r}$ とパラメーター表示される．興味深いことに，この有効ラグランジアン L_{eff} の変換性は Dirac の磁気単極子のラグランジアンの場合(5)と同じであり，したがってここでもトポロジーが量子論において意義を持ってくることが期待される．実際その期待通り，このゲージ対称性を経路積分に載せることによって，全く磁気単極子のときと類似の議論からその‘電荷’即ちこの場合は定数行列 K の値に対する量子化条件を導くことができる[c)]．そして，誘起されたゲージ場のトポロジーの性質やこの量子化条件の背後には，配位空間の大域的構造が重要な役割をしているのである．

具体的には，例えば球面 S^2 上での量子論では誘起されるゲージ場は Dirac の磁気単極子の場合のものと全く同じであり，そしてこのとき定数行列 K の値に対する量子化条件は Dirac の量子化条件に他ならない．一方，S^3 上での量子論では誘起されるゲージ場はトポロジー的には自明であり，このときの量子化条件はちょうどスピン量子化の条件と等しい．(前述のように，一般に等質空間上ではスピンに相当する自由度が生成されるから，K の値に対する量子化条件はそれらに対する量子化条件とみなされる．) また S^4 では，誘起されるゲージ場はインスタントンであり，量子化条件はそのゲージ場と粒子(とスピン)との結合定数に対するものとなる．円周 $Q = S^1$ のときと同様，これらの結果は配位空間のより高次のホモトピー群の性質 $\pi_n(Q) = \boldsymbol{Z}$ $(Q = S^n)$ に起因している．

3. 展望

我々は Dirac の磁気単極子から出発して，量子論におけるトポロジーの重要な役割を等質空間 G/H 上の量子化において見い出した．これらはいずれも量子論の基礎的な概念から導きだされる結果であり，何ら付加的な仮定を前提としていない．このことは，量子論の枠組には寧ろ自然にトポロジーの情報が組み入れられるべき設定になっており，したがって量子物理の精確な理解のためにはトポロジーの概念の応用が不可欠であることを物語っている．これが冒頭で述べたことである．

これまでの話はすべて粒子の量子力学系であったが，無限自由度の場の量子論においてもトポロジーの概念が重要であることはいうまでもない．例えば Yang-Mills 理論では前に触れたようにその量子論的真空状態が角度パラメーター θ で特定されるが，これはちょうど S^1 上の量子論で現れた角度パラメーター α と同種のものである．実際，$\mathcal{A}$ をゲージ場配位の空間とし $\mathcal{G}$ をゲージ変換の自由度の配位空間とすれば，Yang-Mills 理論のゲージ場の物理的配位空間は $Q = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ となるが，この空間は $\pi_1(\mathcal{A}/\mathcal{G}) = \boldsymbol{Z}$ であって穴があいており，まさにこの点で S^1 の場合と同じなのである．ここまでくれば自然に次のことが疑問になるだろう．即ち，S^2 や S^3 上の量子論でより高次のホモトピー群 $\pi_2(Q)$, $\pi_3(Q)$ が重要であったなら，この Yang-Mills 理論の量子論ではどうなのだろうか？　実際，配位空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ のこれらのホモトピー群は(次元とゲージ群によるが)一般に自明ではなく多くの場合 $\boldsymbol{Z}$ となるから，θ 真空に相当するような未知の量子論的効果が存在しても全く不思議ではない．そしてそのような効果は，何らかの誘起された(汎関数)ゲージ場との最小相互作用の形を取る可能性がある．いずれにせよ，このようなトポロジー的見地から Yang-Mills 場の量子論を眺めたとき，我々はその量子論としての全体像のほんの一片，つまり氷山の一角を見ているにすぎず，その圧倒的な大部分は水面下にあって将来の探索を待っているように思えるのである[7)]．

現在，Yang-Mills 場の量子論は標準理論から(超)大統一理論に至るまで現代の素粒子論の構成

c）Dirac の磁気単極子の場合と等質空間 G/H 上での量子論の類似性には，ここで述べたものよりもう少し緻密な議論が必要．興味のある読者は文献 6)を参照されたい．

の最も基本的な枠組となっているが，その非摂動的な面についての理解は多くの様々な試みにも拘らず依然として満足のゆく水準に達していない．非摂動的な面の背後にはその配位空間の非自明な大域的性質があり，その意味でここに述べたトポロジーの量子論における意義を探る研究は，直接その心臓部に切り込もうとするものといえるだろう．そしてその方向に本当に進むためには，大域的性質を扱うファイバー束の理論等の数学的道具と量子論の本格的な融合を成し遂げることが必要のようである．Dirac はその磁気単極子の論文中に言う[1]：

> The most powerful method of advance that can be suggested at present is to employ all the resources of pure mathematics in attempts to perfect and generalise the mathematical formalism that forms the existing basis of theoretical physics, and *after* each success in this direction, to try to interpret the new mathematical features in terms of physical entities.

Dirac の当時(at present)と今日とはこの点においてそれほど差はないのではないだろうか．

参考文献

1) P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A133** (1931) 60.
2) これらの現象については，数理科学 1991 年 11 月号，特集『場の理論とトポロジー』，および本別冊号を参照.
3) L. S. Schulman : Techniques and Applications of Path Integration, Willey, New York, 1981. (邦訳)高塚和夫訳：ファインマン経路積分, 講談社, 1995.
4) G. W. Mackey : Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1969.
5) N. P. Landsman and N. Linden, *Nucl. Phys.* **365** (1991) 121. なお，S^n 上での量子論とゲージ場の誘起について具体的には Y. Ohnuki and S. Kitakado, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 2477 ; *J. Math. Phys.* **34** (1993) 2827.
6) D. McMullan and I. Tsutsui, *Phys. Lett.* **B320** (1994) 287 ; *Ann. Phys.* **237** (1995) 269.
7) この哲学に基づく広汎なレビューとして，C. J. Isham, *in* Relativity, Groups and Topology II (B. S. DeWitt and R. Stora, Eds), North-Holland, Amsterdam, 1984.

(つつい・いずみ，高エネルギー加速器研究機構・素粒子原子核研究所)

Ⅱ．素粒子物理と場

ゲージ場のトポロジーとアノマリー

藤原 高徳

1. はじめに

場の理論では，古典論において成立していた対称性が量子論においても成り立つとは限らず，量子効果のために破れる場合がある*)．対称性から保存則が導かれるので，対称性の破れが起きると古典論での保存則が修正され，新たな付加項が現れる．これを通常アノマリーと呼んでいる[1]．

保存則の種類に応じていろいろなアノマリーが知られているが，本稿では，質量を持たないフェルミ粒子がゲージ場と相互作用する系に現れるカイラル・アノマリーとゲージ・アノマリーを採り上げ，アノマリーとはどのようなものか，またそれらがゲージ場のトポロジー不変量とどのように関係づけられるのかを紹介する．先ず，自由なフェルミ場の性質をおさらいすることから始めよう．

2. カイラル対称性とアノマリー

質量 m，スピン $\frac{1}{2}$ の自由粒子は，ディラック方程式 $(i\partial\!\!\!/-m)\psi(x)=0$ に従う 4 成分スピノル場 ψ によって記述される．ここで，$\partial\!\!\!/=\gamma^{\mu}\partial_{\mu}$ である．γ^{μ} $(\mu=0,1,2,3)$ はガンマ行列と呼ばれる 4×4 の行列で反交換関係 $\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=2\eta^{\mu\nu}$ を満足する．

いまこれらのガンマ行列から $\gamma^5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ を定義すると γ^5 はエルミートで $\{\gamma^{\mu},\gamma^5\}=0, (\gamma^5)^2=1$ を満たす．最後の性質から γ^5 の固有値（掌性またはカイラリティという）が ±1 であることがわかる．そこで場 ψ を γ^5 の固有状態に射影する演算子を $P_{\pm}=\frac{1\pm\gamma^5}{2}$ により定義すると $\psi_{\pm}=P_{\pm}\psi$ はカイラリティ ±1 の固有状態となることがわかる．$\psi_{\pm}$ はそれぞれ ψ の右利き成分，左利き成分と呼ばれている*)．ところがディラック方程式は $\psi_{\pm}$ を用いると $i\partial\!\!\!/\psi_{\pm}(x)=m\psi_{\mp}(x)$ と表され，$\psi_{\pm}$ が互いに関係づけられてしまうのでカイラリティは一般に保存しないのである．

0 質量の場合は事情が異なり，方程式が $i\partial\!\!\!/\psi_{\pm}(x)=0$ となるのでカイラリティは保存される．そこで量子化された場 $\psi_{\pm}$ の 1 粒子状態のカイラリティを ±1 と定義すると，それぞれの場に $n_{\pm}$ 個の粒子が励起された状態の全カイラリティ

$$Q_5=n_+-n_- \tag{1}$$

は全粒子数 $Q=n_++n_-$ とともに保存される．こ

*) 真空の縮退を意味する“対称性の自発的破れ”と混同しないで欲しい．

*) 0 質量の場合，$\psi_+(\psi_-)$ によって記述される粒子は，スピンの回転方向に右(左)ネジを回すとネジが進む方向に運動するので右(左)利き成分と呼ぶのである．

のような保存則が成立するのは場の方程式が $\psi_\pm$ の位相を別々に変化させる変換

$$\psi_\pm \to e^{i\epsilon_\pm}\psi_\pm \qquad (2)$$

の下で不変であることに関係している．これは4元カレント $J^\mu_\pm = \bar{\psi}_\pm \gamma^\mu \psi_\pm$ の保存則

$$\partial_\mu J^\mu_\pm(x) = 0 \qquad (3)$$

を導き，$n_\pm = \int d^3x J^0_\pm(x)$ は時間によらず一定となる．

場の左右の成分を独立に扱う変換(2)をカイラル変換という．$\psi_\pm$ は互いに独立なので別々の場と見なすことができ，ワイル場と呼ばれる．これに対し，質量が0でないときは粒子数 Q だけが保存して Q_5 は保存量ではない．

ワイル場の種類が増えると(2)を一般化した非可換なカイラル対称性が現れる．いま右利き，左利きのワイル場をそれぞれ N 個用意し $\psi_\pm$ で表そう．$\psi_\pm$ は場を N 個並べた列ベクトルを意味する．自由なワイル場はすべて同じ形の方程式を満足するので，この系は(2)以外に変換

$$\psi_\pm \to g_\pm \psi_\pm \qquad (4)$$

の下で不変である．ここで $g_\pm$ は任意の N 行 N 列の特殊ユニタリ行列で，そのような行列全体は $SU(N)$ 群をなす．

ゲージ場との相互作用を導入するために変換(4)で $g_+ = g_-$ を満たす $SU(N)$ 部分群を局所的なゲージ対称性に格上げしよう．つまり時空座標に依存する変換

$$\psi_\pm(x) \to \psi^g_\pm(x) = g^{-1}(x)\psi_\pm(x) \qquad (5)$$

に対して理論が不変であることを要請するわけだが，これは場の方程式に現れる微分を共変微分 $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ で置き換えることでなされる；

$$i\not{D}\psi_\pm = 0 \qquad (6)$$

ここでゲージ場 A_μ は $N\times N$ 行列で，ゲージ変換は

$$A_\mu \to A^g_\mu(x) = g^{-1}(x)A_\mu(x)g(x) + g^{-1}(x)\partial_\mu g(x) \qquad (7)$$

となる．場の強さは

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

により定義され，$F_{\mu\nu} \to F^g_{\mu\nu} = g^{-1}F_{\mu\nu}g$ の変換をうける．$SU(N)$ の交換関係 $[t^a, t^b] = f^{abc}t^c$ を満たす $N\times N$ 行列 $t^a (a=1, \cdots, N^2-1)$ として

$$\mathrm{tr}\, t^a = 0, \mathrm{tr}\, t^a t^b = -\frac{1}{2}\delta^{ab}, t^{a\dagger} = -t^a$$

を満足するものを選び，$A_\mu = gt^a A^a_\mu$ とおく．実場 A^a_μ はゲージ場の成分を表す（g は結合定数)．

方程式(6)は(2)と同様の変換に対し不変なので，保存則(3)が満たされ，古典論においてカイラリティはゲージ相互作用のあるなしに関係なく保存される．他方，カイラル不変性(4)はゲージ場との相互作用のために失われ，$J^\mu_\pm$ を一般化したカレント $J^{a\mu}_\pm = \bar{\psi}_\pm \gamma^\mu t^a \psi_\pm$ の保存則はゲージ変換に対し共変となるように修正される；

$$D_\mu J^{a\mu}_\pm = 0 \qquad (8)$$

ここで共変微分は $D_\mu J^{a\mu}_\pm = \partial_\mu J^{a\mu}_\pm + f^{abc}A^b_\mu J^{c\mu}_\pm$ により与えられる．理論のゲージ不変性が保障されるためには，ゲージ場が結合する全カレント $J^{a\mu} = J^{a\mu}_+ + J^{a\mu}_-$ が保存則

$$D_\mu J^{a\mu}(x) = 0 \qquad (9)$$

を満たさなければならない．しかし $J^a_\pm$ が(8)を満足するので，これは自動的に満たされる．

これまでのところ場はすべて古典的なものとして扱ってきた．ここで場 $\psi_\pm$ を量子化する．最終的にはゲージ場も量子場として扱わねばならないが，アノマリーを論ずる場合にはゲージ場の量子的振舞いは本質的でないので古典的な外場とする．

量子論では場 $\psi_\pm(x)$ は演算子になり，カレント $J^{a\mu}_\pm(x)$ のように同一時空点での場の積を含む量は，適当な方法で正則化しておく必要がある．どの正則化を採用すべきかの重要な指針となるのが系の対称性で，それをなるべく傷つけないものを選ばなければならない．しかし，カイラル変換のように γ^5 の関係した対称性は一筋縄では行かず，それを無傷のままでは量子論を定義できないのである．これは量子論での保存則の破れとなって現れる．いま議論している系では，保存則(3)は修正され，粒子数カレント $J^\mu = J^\mu_+ + J^\mu_-$ の保存を要求すると，カイラル・カレント $J^\mu_5 = J^\mu_+ - J^\mu_-$ の保存則が犠牲になりアノマリーが現れる．

アノマリーはゲージ場とその微分からなる多項式で書かれ，$\partial_\mu J_5^\mu$ がゲージ不変な擬スカラー量で質量次元 4 を持つことから，$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ に比例する．比例定数は摂動論などで決めるしかないが，結果は

$$\partial_\mu J_5^\mu = \frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \tag{10}$$

となる．これをカイラル・アノマリーという．量子論ではカイラリティ Q_5 の保存則は破れ，右左の場の位相を別々に変更するカイラル不変性は失われる．

式(10)は次のように書くこともできる；

$$\partial_\mu J_5^\mu = \frac{1}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\,\mathrm{tr}\left(A_\nu\partial_\rho A_\sigma + \frac{2}{3}A_\nu A_\rho A_\sigma\right) \tag{11}$$

左辺を全時空で積分したものは，時刻 $x^0 = \pm\infty$ におけるカイラリティの変化 $Q_5(+\infty) - Q_5(-\infty)$ になる．他方，右辺の積分は，ゲージ場 A_μ の時空の端での振舞いだけから定まる数 k を与える．後で説明するように，k は整数値をとりゲージ場のトポロジーに関係した不変量になる．

カレント $J_\pm^{a\mu}$ の“保存則”(8)にも(10)とよく似たアノマリーが現れる；

$$D_\mu J_\pm^{a\mu} = \pm\frac{1}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,t^a\partial_\mu\left(A_\nu\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}A_\nu A_\rho A_\sigma\right) \tag{12}$$

しかしゲージ場が結合する全カレント

$$J^{a\mu} = J_+^{a\mu} + J_-^{a\mu}$$

は，アノマリーが $J_\pm^{a\mu}$ の間で相殺するため“保存則”(9)を満足する．

式(12)のように，ゲージ・カレントに現れるアノマリーはゲージ・アノマリーと呼ばれる．理論がゲージ不変であるためには全ゲージ・カレントが共変的な保存則を満たしていればよい．ゲージ・アノマリーが相殺せずに残る理論ではゲージ不変性が量子論の段階で失われ，ゲージ場まで含めて量子論を考えようとすると，くりこみ可能性やユニタリ性といった物理的な要請が満たされなくなり，困難に直面する．

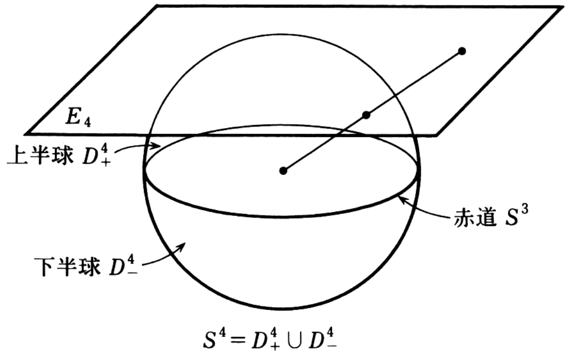
3．ゲージ場のトポロジーとカイラル・アノマリー

ゲージ場のトポロジー不変量とカイラル・アノマリーとの関係を明確にするため，時間変数を純虚数に解析接続し 4 次元ユークリッド空間 E_4 へ移る．E_4 の座標を x^μ ($\mu=1,\cdots,4$) で表す．ただし $x^4 = ix^0$ である．ガンマ行列の時間成分は $\gamma^4 = -i\gamma^0$ となり，γ^μ ($\mu=1,\cdots,4$) は反エルミートとなる．またゲージ場の時間成分も解析接続し，$A_4 = -iA_0$ とする．ゲージ場 A_μ として場の強さ $F_{\mu\nu}$ が遠方で十分速く 0 となるものだけを考える．このとき A_μ は無限遠で

$$|x| \to +\infty \quad のとき \quad A_\mu(x) \to g^{-1}(x)\partial_\mu g(x) \tag{13}$$

のように振舞う．$g(x)$ は $A(x)$ に応じて定まり群 $G = SU(N)$ に値をとる関数である．E_4 の無限遠点を 3 次元球面 S_∞^3 と同一視すると g は写像 $S_\infty^3 \to G$ を定義する．

関数 g の意味を明確にするために，構造群を G



とする4次元球面 S^4 上の主束を考える[2]．S^4 は赤道 S^3 によって上半球 D^4_+ と下半球 D^4_- に分けられ(図)，これらは1点に潰すことのできる4次元円盤と位相的に等価である．$D^4_\pm$ に制限された主束は $G\times D^4_\pm$ と同型なので，それらを赤道上でどう張り合わせるかで G-束が定まる．張り合わせの規則は赤道 S^3 上で互いの G の目盛りのズレ g_{+-} を与えれば定まる．g_{+-} は変換関数と呼ばれ，S^3 から G への写像を定義する．変換関数全体の集合を $\mathcal{G}_3$ で表す．

主束は連続変形により移り合えるかどうかで同値類に分かれる．変換関数が連続変形で結ばれるとき対応する主束は同値であるので，主 G-束はホモトピー群 $\pi_0(\mathcal{G}_3)=\pi_3(G)$ によって分類される．$G=SU(N)$ に対し $\pi_3(G)=\boldsymbol{Z}$ (整数) であるので，整数 k を与えれば同値類がひとつ定まる．これは群 G の中に連続的に1点に潰すことのできない3次元球面が存在することを意味し，g_{+-} によって定義される写像 $S^3\rightarrow G$ がこの球面を何度包み込むかを与えることで纏わり数 k が定まる (符号は風呂敷で物を包むとき同様，表で包むか裏で包むかに対応する)．k は赤道上の積分

$$k=\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3} d^3y\varepsilon^{klm} \times \mathrm{tr}(g_{+-}^{-1}\partial_k g_{+-} g_{+-}^{-1}\partial_l g_{+-} g_{+-}^{-1}\partial_m g_{+-}) \qquad (14)$$

により与えられ，変換関数 g_{+-} の連続変形に対し変化ないトポロジー不変量となる．$k=0$ を与える変換関数を持つ G-束は積束 $G\times S^4$ と同値なので，k は G-束が積束からどれだけ離れているかの目安を与える．

いま図に示されたように D^4_+ を立体射影によって E^4 と同一視する(赤道 S^3 は S^3_∞ と同一視)．これによりゲージ場 A_μ は D^4_+ 上の接続 A_+ (1-形式)となる．D^4_- は便宜上導入したものなので自明な接続 $A_-=0$ を仮定する．両者は赤道 S^3 上で

$$A_+=g_{+-}^{-1}A_-g_{+-}+g_{+-}^{-1}dg_{+-}$$

により結ばれなければならない．これより境界条件(13)に現れる g は変換関数 g_{+-} そのものであることがわかる．

ここでゲージ場のトポロジーについて触れておこう*)．S^4 上に許されるゲージ場全体からなる配位空間を $\mathcal{A}$，あらゆるゲージ変換からなる空間を $\mathcal{G}$ で表す．ゲージ変換で結ばれるゲージ場は物理的に同値(ゲージ不変性)なので，それらを同一視した空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ (ゲージ軌道空間という)が異なる物理を記述するゲージ場の配位空間となる．同値な主束上のゲージ場は連続変形で移り合えるので，$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ は位相的に $\mathcal{G}_3$ と同値である．したがって

$$\pi_0(\mathcal{A}/\mathcal{G})=\pi_0(\mathcal{G}_3)=\pi_3(G)=\boldsymbol{Z} \qquad (G=SU(N)) \qquad (15)$$

これはゲージ軌道空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ が(14)で与えられる整数 k によって特徴づけられる無限個の連結成分を持つことを意味する．

これに対し，場 $\psi_\pm$ の配位空間は，主 G-束に同伴するベクトル束 E の滑らかな断面からなる集合である．主束の位相的構造は変換関数を通じてベクトル束に伝わり，位相的に同値でないベクトル束を構成することができる．同値でないファイバー束を見分ける有用な概念として，曲率形式 $F=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ (場の強さ) で書かれるゲージ不変な多項式 (特性類と呼ばれる) がある[2]．特性類を空間 (いまの議論では S^4) 内の閉局面上で積分したものはトポロジー不変量となる．特性類

$$\mathrm{ch}(E)=\mathrm{tr}\exp\left(\frac{i}{2\pi}F\right) \qquad (16)$$

はアノマリーに関係してしばしば現れ，チャーン指標と呼ばれる．

ユークリッド空間ではデイラック演算子 $\not{D}$ はエルミートになり，実の固有値を持つ．φ_n を固有値 λ_n に属する規格化された固有関数とすると，$\not{D}$ が γ^5 と反可換なことから0でない固有値は必ず対 $\pm\lambda_n$ で現れる．他方 $\lambda_n=0$ のゼロモード解は γ^5 の固有関数にとれるのでカイラリティの固有状態に選ぶことができる．

ここで再びカイラル・カレント $J^\mu_5=\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ に目を向けよう．その真空期待値は伝播関数

*) 以下ではゲージ場は上に述べた方法で E^4 から得られる S^4 上の主束に対し定義されたものとする．

$$S(x,y)=\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle$$

を用い

$$\langle J_5^{\mu}(x)\rangle=-\lim_{y\to x}\mathrm{tr}\,\gamma^{\mu}\gamma^5 S(x,y)$$

により与えられる．これより

$$\langle\partial_{\mu}J_5^{\mu}(x)\rangle=-2i\lim_{y\to x}\mathrm{tr}\,\gamma^5\delta^4(x-y) \qquad (17)$$

を得る．右辺は $0\times\infty$ の不定形なので，ゲージ不変性を壊さないように δ-関数の直前に演算子 $\exp[-\not{D}^2/M^2]$ を挿入し，計算の最後で $M^2\to\infty$ の極限をとることで(17)の右辺を定義する．その結果，時空を E_4 へ解析接続したことに起因する因子 i を除けば，(10)が導かれる．

この関係式は $\not{D}$ の固有関数系 $\{\varphi_n(x)\}$ を用い

$$\lim_{M^2\to\infty}\sum_n e^{-\lambda_n{}^2/M^2}\varphi_n^{\dagger}\gamma^5\varphi$$

$$=-\frac{1}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \qquad (18)$$

の形に書ける．左辺は小さな固有値を持つものから順々に和をとることを意味する．両辺を全空間で積分することにより

$$n_+-n_-=-\frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \qquad (19)$$

が得られる．ここで $n_{\pm}$ はカイラリティ ±1 のゼロモード解の個数を表す．ゼロモード解以外は φ_n と $\gamma^5\varphi_n$ が対をなす固有値 $\pm\lambda_n$ に属する固有関数なので積分に寄与しない．

式(19)の左辺 n_+-n_- はディラック演算子 $\not{D}$ の指数と呼ばれ，ゲージ場を連続的に変化させても変わらないトポロジー不変量となる．このことは直感的に次のように理解できる；ゲージ場を連続的に変形すると，それに応じて固有値 λ_n や固有関数 φ_n が連続的に変化するので，ゼロモード解の個数も一般に変化する．しかし新しく加わるゼロモード解は必ずカイラリティが正負の状態で対を組むことができるので指数には寄与しない．同じことがゼロモード解でなくなる場合にも当てはまる．このことは指数 n_+-n_- がゲージ場の連続変形に対し不変であることを意味する．

他方，(19)の右辺はチャーン指標(16)を S^4 上で積分したもので，ゲージ場が属する $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ の連結成分を特徴づける整数 k に対応するトポロジー不変量を与える．式(19)は，これら別々に定義されたトポロジー不変量が等しいことを述べており，アティヤ-シンガーの指数定理と呼ばれる[4]．

4．ゲージ・アノマリー

ゲージ・アノマリーを理解するために，ゲージ不変性との関係を調べることから始める．簡単のために N 個の右利きワイル場 ψ が，ゲージ場 A_{μ} と相互作用する系を考える．量子論ではいろいろな状態の間の遷移確率を計算することが重要な問題であるが，その基本となるのが真空から真空への遷移振幅 $Z[A]$ で，経路積分

$$Z[A]=e^{-W[A]}=\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}e^{-S} \qquad (20)$$

により与えられる．ここで作用 S は

$$S=\int d^4x\bar{\psi}i\not{D}\psi$$

である．式(20)の積分は場 $\psi,\bar{\psi}$ のすべての配位にわたって和を行うことを意味している．ゲージ場 A_{μ} の汎関数 $W[A]$ は有効作用と呼ばれ，フェルミ粒子について1ループ図形をすべてたし上げたものである．定義から $W[A]$ は $2\pi i$ の整数倍で表される不定性を持つ．

作用 S がゲージ不変であるので，場 $\psi,\bar{\psi}$ のすべての配位にわたる和 $Z[A]$ は素朴にはゲージ不変であると期待される；$Z[A^g]=Z[A]$．無限小変換 $g(x)=1+u(x)$, $u(x)=t^au^a(x)$ に対しゲージ場は $\delta_uA_{\mu}^a=D_{\mu}u^a$ だけ変換を受ける．他方，$W[A]$ のゲージ変分は(20)より

$$\delta_uW[A]=-i\int dx^4u^aD_{\mu}\langle J_+^{a\mu}\rangle \qquad (21)$$

となり，カレントの期待値で表される．したがって $W[A]$ のゲージ不変性はゲージカレントの共変的な保存を意味する．しかし実際にはゲージ不変性を保持したまま理論を正則化できないので $\delta_uW[A]$ はゲージ・アノマリー(12)と関係づけられる；

$$\delta_u W[A]=\frac{i}{24\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$
$$\times \mathrm{tr}\ u\partial_\mu\left(A_\nu\partial_\rho A_\sigma+\frac{1}{2}A_\nu A_\rho A_\sigma\right) \qquad (22)$$

右辺は純虚数なので Im $W[A]$ にアノマリーが現れ，実部はゲージ不変であることがわかる．

有効作用 $W[A]$ はゲージ場の複雑な汎関数で任意の A_μ に対してあからさまな表式を与えることはできないが，そのゲージ変分がゲージ場とその微分からなる局所多項式で表されることは注目すべきである．この事実はアノマリーの形を非常に制限する．ゲージ変換が群を成すことからゲージ変分は $\delta_{u_1}\delta_{u_2}-\delta_{u_2}\delta_{u_1}=\delta_{[u_1,u_2]}$ を満たす．この式の両辺を $W[A]$ に作用させ，(22)を用いるとアノマリーは

$$\delta_{u_1}\mathcal{A}_{u_2}-\delta_{u_2}\mathcal{A}_{u_1}=\mathcal{A}_{[u_1,u_2]} \qquad (23)$$

を満足することがわかる．ただし (23) の右辺を $\mathcal{A}_u$ で表した．これは，(22)を $W[A]$ についての微分方程式と見なした際の積分可能条件に他ならず，ヴェス-ズミノ条件と呼ばれる．有効作用のゲージ変分によってアノマリーを定義する立場に立つと，(23)はアノマリーについての微分方程式であり，(22)はひとつの解となっている．$\Omega[A]$ をゲージ場とその微分からなる任意の局所多項式とすると，そのゲージ変分 $\mathcal{A}_u=\delta_u\Omega[A]$ も(23)を満たす解になっている．しかしそのようなアノマリーは $W[A]-\Omega[A]$ を有効作用と定義し直すことにより取り除くことができるので自明なアノマリーと呼ばれる．ヴェス-ズミノ条件を満たす解のうちで，ゲージ場の局所多項式のゲージ変分として表すことのできないものが本当のアノマリーである．

5. ゲージ場のトポロジーとゲージ・アノマリー

ゲージ場の配位空間$\mathcal{A}$は，ゲージ変換群$\mathcal{G}$ をファイバーとする軌道空間$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の主束とみなすことができる．アノマリーがない理論では $W[A]$ をゲージ不変に定義できるので，軌道空間$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の汎関数となる．アノマリーがある理論では $W[A]$ をゲージ不変に定義できないが，アノマリーがヴェス-ズミノ条件を満足するので(22)をファイバー方向に積分することができる．

解を具体的に書き下すために多少天下り的ではあるが，S^4 にコンパクト化した4次元時空が埋め込まれた高次元の空間を想定し，ゲージ場もその空間へ適当に拡張しておく．さらにゲージ場と場の強さをそれぞれ微分形式を用い，

$$A=A_\mu dx^\mu,$$
$$F=dA+A^2=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

で表そう．ゲージ変換(7)は

$$A^g=g^{-1}Ag+g^{-1}dg,$$
$$F^g=g^{-1}Fg$$

と書ける．

いまゲージ不変な6-形式 tr F^3 に注目すると，これは $d\,\mathrm{tr}\,F^3=0$ を満足し閉形式となる．ところが任意の閉形式は局所的には完全であるので $\mathrm{tr}\,F^3=d\omega_5(A,F)$ を満たす5-形式が存在する．ω_5 はチャーン-サイモンズ形式と呼ばれ，

$$\omega_5(A,F)=\mathrm{tr}\left(AF^2-\frac{1}{2}A^3F+\frac{1}{10}A^5\right) \qquad (24)$$

により与えられる．ω_5 はゲージ不変ではないが $d\omega_5$ がゲージ不変なので，

$$d\omega_5(A^g,F^g)=d\omega_5(A,F)$$

を満たし，差

$$\omega_5(A^g,F^g)-\omega_5(A,F)$$

は再び閉形式となる．これを時空 S^4 を境界とする任意の5次元円盤 D^5 上で積分し

$$\Gamma[g,A]=\frac{1}{24\pi^2}\int_{D^5}\{\omega_5^0(A^g,F^g)-\omega_5^0(A,F)\}$$
$$=\frac{1}{240\pi^2}\int_{D^5}\mathrm{tr}(g^{-1}dg)^5$$
$$+\frac{1}{48\pi^2}\int_{S^4}\mathrm{tr}\Big[-V(AF+FA-A^3)$$
$$+\frac{1}{2}(VA)^2+V^3A\Big] \qquad (25)$$

が得られる．ここで $V=dgg^{-1}$ である．

式(25)の第2項は時空 S^4 上の場だけに依存し，5次元円盤 D^5 の選び方によらない．これに対

し最初の項は D^5 上の積分で書かれているので円盤の取り方に依存する．いま S^4 を共通の境界とする二つの円盤 D_1, D_2 を任意に選び，$\Gamma[g, A]$ を計算したものを比較してみると，その差は

$$2\pi ik=\frac{1}{240\pi^2}\int_{S^5}\mathrm{tr}(g^{-1}dg)^5 \qquad (26)$$

により与えられる．ここで S^5 は D_1, D_2 の境界を張り合わせて得られる5次元球面である．係数を別にすれば(26)は(14)の5次元への拡張になっており，k は整数となる．したがって $e^{-\Gamma[g,A]}$ は勝手に想定した高次元空間に場を拡張する仕方に依存せず，S^4 上の場 g, A_μ の汎関数となる．ところで無限小変換 $g=1+u$ に対し(25)は

$$\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^4}\mathrm{tr}\left[ud\left(AdA+\frac{1}{2}A^3\right)\right] \qquad (27)$$

となるが，これはゲージ・アノマリー(22)に他ならない．したがって(22)をファイバー$\mathcal{G}$に沿って積分したものは

$$W[{}^gA]-W[A]=\Gamma[g, A] \pmod{2\pi i}$$

により与えられることになる．

こうして見ると似ているようで全然別々の顔を持っているカイラル・アノマリーとゲージ・アノマリーの間には，興味ある関係が存在することが分かる．すなわち解(25)を導出する出発点となった6-形式は係数も含めて

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^3\mathrm{tr}\,F^3 \qquad (28)$$

により与えられ，4次元カイラル・アノマリーに対する(18)を6次元へ拡張したものになっている．この事実は，カイラル・アノマリー同様，ゲージ・アノマリーもゲージ場のトポロジーから理解できることを示唆している[3]．

式(28)はチャーン指標(16)の6-形式の部分に対応し，閉じた6次空間上のベクトル束のトポロジー不変量を与える．この空間が位相的に6次元球面 S^6 と見なせるとき，S^6 上の主 G-束を考えることになるが，これはホモトピー群 $\pi_5(G)$ によって分類される．他方，軌道空間$\mathcal{A}/\mathcal{G}$は位相的に$\mathcal{G}_3$と同値であるので

$$\pi_2(\mathcal{A}/\mathcal{G})=\pi_1(\mathcal{G})=\pi_5(G)=\boldsymbol{Z} \qquad (G=SU(N), N\geq 3) \quad (29)$$

を得る．これは$\mathcal{A}/\mathcal{G}$の中に1点に潰すことができない2次元球面が，また$\mathcal{G}$の中に1点に潰せないループが存在することを意味する．このような位相的性質が有効作用 $W[A]$ をゲージ不変に定義する際の障害となり，ゲージ・アノマリーとして見えているのである．

これを見るために θ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ をパラメータとするゲージ変換 $g(x, \theta)$ で $\theta=0, 2\pi$ のとき単位元となるものを考える．$g(x, \theta)$ は θ が0から 2π へと変化するとき$\mathcal{G}$の中にループを描くので，S^1 から$\mathcal{G}$への写像を定義する．時空の無限遠点に対応する S^4 上の点 x_∞ では $g(x_\infty, \theta)=1$ を満たすので，$S^1\times S^4$ は S^5 とみなすことができる．いまゲージ場 A として指数(19)が0となるもので，ゼロモード解を持たないものを選ぶ．それを $g(x, \theta)$ を用いてゲージ変換したものを A_θ で表す．このとき $Z[A_\theta]=e^{-W[A_\theta]}$ は S^1 から，原点がくり抜かれた複素平面への写像を定義する．そのような写像は S^1 が写される複素平面上のループが原点を何周するかによって同値類に分けられる．θ が0から 2π まで動くとき $Z[A_\theta]$ が原点を周回する回数 k は

$$\begin{aligned}2\pi ik&=-\int_0^{2\pi}d\theta\frac{dW[A_\theta]}{d\theta}\\&=\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^1}d\theta\\&\quad\times\int_{S^4}\mathrm{tr}\left[g^{-1}\partial_\theta gd\left(A_\theta dA_\theta+\frac{1}{2}A_\theta^3\right)\right]\end{aligned}$$

により与えられ，ゲージ・アノマリーが現れる．この式はさらに(26)と同じ形に変形できる．纏わり数 k は $g(x, \theta)$ が属するホモトピー類に対して定まるトポロジー不変量となる．

紙数の関係で触れられないが，拡張された指数定理（families index theorem）を，ゲージ場をパラメータとするディラック演算子の族に対し定義された指数束に適用すると，ゲージ・アノマリーを任意の偶数次元で係数まで含めて導出することができる．またこの定式化は4次元のゲージ・アノマリーと6次元のカイラル・アノマリーとの不思議な関係に自然な説明を与える[4]．

6. おわりに

カイラル対称性に現れるアノマリーとゲージ場のトポロジーとの関係について見てきた；カイラル・アノマリーは，ゲージ軌道空間が無限個の連結成分を持つことに関連したトポロジー不変量と，ゲージ・アノマリーはゲージ軌道空間の可縮でない2次元球面の存在に関連した不変量と，それぞれ関係づけられる．

ホモトピー群

$$\pi_n(\mathcal{A}/\mathcal{G})=\pi_{n+3}(G) \quad (n=0, 1, 2, 3, \cdots)$$

が消えない場合には，トポロジー不変量が存在する．本稿で紹介した $n=0, 2$ 以外にも多くの不変量が存在するが，それが物理的にどう現れるのか，よくわかっていない．

文献

基本的な文献は3)に引用されているのでそちらを参照下さい．

1) 藤川和男：日本物理学会誌 **41** (1986) 685,
菅本晶夫：数理科学 1986年11月号 p. 57,
藤原，北門：パリティ **3** (1988) 12.
ゲージ理論全般とアノマリーに関する教科書として，九後汰一郎：「ゲージ場の量子論 I，II」培風館(東京，1989).

2) T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, *Phys. Rep*. **66** (1980) 213.
C. ナッシュ，S. セン：「物理学者のためのトポロジーと幾何学」，佐々木隆他訳，マグロウヒル(東京，1989).

3) L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, *Nucl. Phys.* **243** (1984) 449.

4) M. F. Atiyah and I. M. Singer, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **81** (1984) 2597.

(ふじわら・たかのり，茨城大学・理学部)

$N=2$ 超対称Yang-Mills理論とSeiberg-Witten方程式

伊藤 克司

1．はじめに

最近，超対称性を持つ場の理論の非摂動論的な性質に関する理解が深まりつつある．この小論では，1994年にN. SeibergとE. Wittenが発表した，$N=2$ 超対称Yang-Mills理論の低エネルギー有効作用に関する理論[1]の紹介を試みたいと思う．

2．$N=2$ 超対称Yang-Mills理論

超対称性[2]とはフェルミオンとボソンを結びつける対称性である．それは超電荷と呼ばれる反可換なスピノール演算子

$$Q_\alpha,\ \bar{Q}^{\dot\alpha}\quad (\alpha=1,2,\ \dot\alpha=\dot1,\dot2)$$

によって生成される．超対称生成子が N 組 $\{Q^A_\alpha, \bar{Q}^{\dot\alpha}_A\}$ $(A=1,\cdots,N)$ あるとき，これを N 超対称性という．いま興味のある $N=2$ 超対称性の場合(反)交換関係は次のように与えられる：

$$\{Q^A_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta B}\}=\delta^A_B\sigma^m_{\alpha,\dot\beta}P_m,$$
$$\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\}=\epsilon^{AB}\epsilon_{\alpha\beta}Z,$$
$$\{\bar{Q}_{\dot\alpha A}, \bar{Q}_{\dot\beta B}\}=\epsilon_{AB}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar{Z}\,.$$

ここで P_m は並進演算子である．Z は中心荷(central charge)と呼ばれ N が2以上の超対称性に必ず現れる重要な量である．これは，Q, P_m やローレンツ演算子 M_{mn} たちと可換なので理論のなかに現れる保存量の適当な線形結合で書くことができる．また，超対称性を持つ場の理論は，古典的には超電荷の位相の取り方についての不変性がある．これは $\mathcal{R}$ 対称性と呼ばれ，現象論においても重要な役割を果たす．$N=2$ の場合，$\mathcal{R}$ 対称性は2行2列のユニタリー行列 M によって

$$Q^A\rightarrow M^{AB}Q^B$$

と表されるので，これを $U(2)_{\mathcal{R}}$ と書く．$N=1$ の場合は，$U(1)_{\mathcal{R}}$ である．

以上の準備のもとで $N=2$ 超対称Yang-Mills理論について説明しよう．ゲージ群を G とし，ゲージポテンシャルを A^a_m $(a=1,\cdots,\dim G)$ とすると，それに対して2個のWeylフェルミオン λ^a_α, ψ^a_α が存在し，さらに複素ボソン ϕ^a で $N=2$ のカイラル多重項が構成される(図1)．これらの場はすべてゲージ群の随伴表現に属する．クォークなどの物質場は複素ボソン場2個とWeylフェルミオン2個で作られるスカラー多重項をなす．このとき，ひとつの $N=2$ 多重項は異なるカイラリティを同時に含んでいるため現実の素粒子

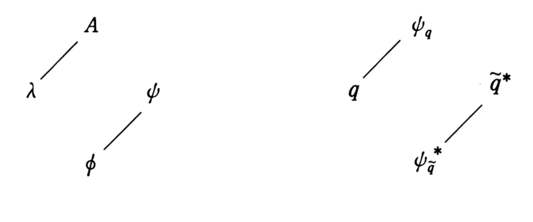


図1

模型に合うような模型が作れない．これが，もともと $N=2$ 理論が興味を持たれなかったひとつの理由である．

さてこれらの場は $N=2$ ではひとつの多重項に属するが，$N=1$ 理論としての立場から見るとゲージ場を含む $N=1$ ベクトル多重項 $(A^a_m, \lambda^a_\alpha)$ と，ゲージ群の随伴表現に従う $N=1$ カイラル多重項 (ϕ^a, ψ^a_α) とみなすこともできる．超対称な場の理論は，4次元時空座標 $x=(x^0, x^1, x^2, x^3)$ に反可換なグラスマン座標 $(\theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ を考え合わせた超空間 $Z=(x, \theta, \bar{\theta})$ 上の超場形式を用いると簡明に理論を書き表すことができる．すなわち，$N=1$ ベクトル多重項に対してカイラル超場

$$W^a_\alpha = \lambda^a_\alpha + \theta\sigma^{mn}F^a_{mn} + \cdots,$$

$N=1$ カイラル多重項に対してカイラル超場

$$\Phi^a = \phi^a + \theta\psi^a + \cdots$$

を導入する．作用は，$N=1$ 超場形式を用いて

$$S^{N=2} = \frac{1}{2g^2}\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\bar{\Phi}_a(e^V)_{ab}\bar{\Phi}_b + \frac{1}{8g^2}\left(\int d^2\theta W^{\alpha a}W_{\alpha a} + \text{h.c.}\right)$$

と書かれる．ここで V はベクトル超場で $N=1$ ベクトル多重項で書ける．作用を成分で表すと

$$S^{N=2} = \frac{1}{g^2}\int d^4x\, \mathrm{tr}\Big(-\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + i\lambda^i\sigma^m D_m\bar{\lambda}^i - (D_m\phi^\dagger)(D_m\phi) - \frac{1}{2}[\phi, \bar{\phi}]^2 - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\phi}\epsilon_{ij}[\lambda^i, \lambda^j] + \frac{i}{\sqrt{2}}\phi\epsilon_{ij}[\bar{\lambda}^i, \bar{\lambda}^j]\Big) \qquad (1)$$

である．ここで $\lambda^1=\lambda, \lambda^2=\psi$．この作用をみると複素スカラー場 ϕ は Higgs 場の役割を持っていることがわかる．そのポテンシャルは

$$V(\phi) = \frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}[\phi, \bar{\phi}]^2 \qquad (2)$$

で与えられる．

3．低エネルギー有効理論——正則性の威力

以下，簡単のためゲージ群を $SU(2)$ に限る．我々のこれからの目標は，$N=2$ 超対称 Yang-Mills 理論の真空の構造を調べることである．古典的真空は Higgs 場 ϕ のポテンシャル $V(\phi)=0$ で特徴づけられる．この解は，式(2)から

$$\phi = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad (3)$$

で与えられる．すなわち，古典的真空は複素パラメーター a で特徴づけられる．$a \neq 0$ の場合，W ボソン $A^\pm$ は質量 ga を持つので，ゲージ群は $SU(2)$ から $U(1)$ に自発的に破れる．$a=0$ の場合ゲージ群は $SU(2)$ に回復する（図2）．また古典論では大局的な対称性は $U(2)_\mathcal{R}$ である．特にその部分群 $U(1)_\mathcal{R}$ は，変換

$$A_m \to A_m,\ \lambda^i \to e^{i\gamma}\lambda^i,\ \phi \to e^{2i\gamma}\phi \qquad (4)$$

で定義される．

量子効果を取り入れると上の議論はどう変わるだろうか．まず $U(2)_\mathcal{R}$ 対称性のうち対角部分 $U(1)_J \times U(1)_\mathcal{R}$ の $U(1)_\mathcal{R}$ 部分群はアノマリーを持ち，$\boldsymbol{Z}_8$ に破れる．さらにこの $\boldsymbol{Z}_8$ 変換のうち半分は $U(1)_J$ の中心 $\boldsymbol{Z}_2$ により同一視されるので大局的対称性は $SU(2)_\mathcal{R} \times \boldsymbol{Z}_4$ になる．さらに Higgs 場が期待値を持つ場合 $\boldsymbol{Z}_4$ は $\boldsymbol{Z}_2$ に自発的に破れる．

量子論においては古典ポテンシャル $V(\phi)$ は摂動，非摂動効果を受ける．しかし，$N=2$ 超対称性が保たれている限り真空はポテンシャルエネルギーは0である．そこで量子論では，真空をゲージ不変なパラメーター $\mathrm{Tr}\,\phi^2$ の期待値

$$u = \langle \mathrm{Tr}\,\phi^2 \rangle$$

で特徴づける．$\boldsymbol{Z}_2$ 対称性は u に対して $u \to -u$ のようにはたらく．量子論でも一般には Higgs 場が期待値を持つのでゲージ群は $U(1)$ に破れている．エネルギースケールが小さい場合，質量0の

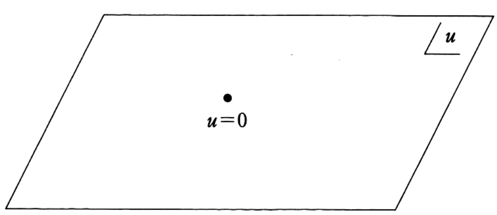


図2　古典モジュライ空間．
原点でゲージ対称性 $SU(2)$ が回復．

場が物理的に重要な役割を果たす．そこで，W ボソンのように質量を持っている場についてはすべて汎関数積分してしまうと，質量 0 の場についての作用（Wilson 型有効作用）が現れる．$N=2$ の場合，低エネルギー有効理論は $N=2U(1)$ ベクトル多重項

$$W_\alpha=\lambda_\alpha+\theta\sigma^{mn}F_{mn}+\cdots$$

と

$$A=a+\theta\psi+\cdots$$

で記述できる．その作用は摂動，非摂動効果のために複雑な形になるであろう．しかしながら，$N=2$ 超対称性は状況を非常に簡単にする．すなわち，低エネルギー有効理論においては量子効果は，1 個の正則関数 $F(A)$ を用いて

$$S=\frac{1}{4\pi}\int d^4x\ \mathrm{Im}\left[\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\frac{\partial F(A)}{\partial A}\bar{A}+\frac{1}{2}\int d^2\theta\frac{\partial^2 F(A)}{\partial A^2}W^\alpha W_\alpha\right] \quad (5)$$

と書かれる．$F(a)$ はプレポテンシャルと呼ばれる．ここで F の二階微分 $\tau(a)\equiv\partial^2F/\partial a^2$ を

$$\tau(a)=\frac{\theta_{\mathrm{eff}}(a)}{2\pi}+i\frac{4\pi}{g_{\mathrm{eff}}(a)^2} \quad (6)$$

と実部と虚部に分けてみると，θ_{eff} は理論の有効 θ 項，g_{eff} は有効結合定数と解釈できる．ちなみに古典論では

$$F_{\mathrm{classical}}(a)=\frac{1}{2}\tau_{\mathrm{cl}}a^2$$

で与えられる．

もし正則関数 $F(a)$ の形が決まれば我々は低エネルギー有効理論について（原理的には）すべてを知ることができる．まず始めに $a=\infty$ 付近での $F(a)$ の振る舞いを調べてみよう．Higgs 場の期待値は理論のエネルギースケールの大きさを表している．$a=\infty$ 付近では理論は漸近自由であり摂動論が有効である．有効結合定数を調べるためにはくりこみ群のアイデアを使う．有効結合定数は微分方程式

$$\frac{dg}{dt}=\beta(g)$$

を満足する．ここで $t=\log\mu$ で μ はエネルギースケールを表す．右辺はベータ関数と呼ばれ，摂動論で計算できる量である．答は，摂動の 1-ループまでの近似で

$$\beta(g)=-bg^3$$

で与えられる．ここで $b=4/(4\pi)^2$．$N=2$ 理論の場合，この摂動論的な計算結果が厳密であることが $N=2$ 理論における非くりこみ定理という形で知られている．これより，微分方程式は $t=\log\mu$ で g という初期条件のもとで簡単に積分ができて，エネルギースケール E における有効結合定数は

$$\frac{1}{g^2\left(\frac{E}{\mu},g\right)}=\frac{1}{g^2}+2b\log\left(\frac{E}{\mu}\right)$$

から，

$$g^2\left(\frac{E}{\mu},g\right)=\frac{1}{2b\log\left(\frac{E}{\Lambda}\right)}$$

と決められる．ここで QCD のスケール定数

$$\Lambda=\mu\exp\left(-\frac{1}{2bg^2}\right)$$

を導入した．また，摂動論的には $U(1)_{\mathcal{R}}$ アノマリーのため θ 項が入らない．この二つの結果から摂動の 1 ループ近似で $E=\langle a\rangle$ とおいて

$$\tau(\langle a\rangle)\sim\frac{i}{\pi}\log\left(\frac{\langle a\rangle}{\Lambda}\right)$$

であることがわかる．より精密な計算によると $F(a)$ は 1 ループ近似で

$$F_{1\text{-loop}}(a)=\frac{i}{2\pi}a^2\log\left(\frac{a^2}{\Lambda^2}\right)$$

と計算される．摂動論で計算できるのはここまでで，実際のプレポテンシャルはこれにインスタントンの効果が加わり，次の形に書ける：

$$F(a)=\frac{i}{2\pi}a^2\left(\log\frac{a^2}{\Lambda^2}-\sum_{k=0}^{\infty}F_k\left(\frac{\Lambda}{a}\right)^{4k}\right). \quad (7)$$

ここで F_k は定数である．F_1 が 0 でないことは Seiberg によって初めて指摘された[3]．F_k の値をすべて求めるためには a が小さいところの情報が必要である．そこでは有効結合定数が大きくなるために摂動論が使えなくなる．しかし，我々は双対性という手法を持っている．これを手掛かりにして強結合領域の物理を調べよう．

4．モノポール，双対性

ここで $N=2$ 超対称 Yang-Mills 理論におけるモノポールについて復習してみよう[4]．$N=2$ 超電荷は保存量であるのでそれに対応する Noether カレントが構成でき，それを用いて中心荷 Z を計算してみると，

$$Z = a(n_e + \tau_{cl} n_m),\ n_e, n_m \in \boldsymbol{Z}$$

となり，Z が電荷 n_e と磁荷 n_m に依存している．Seiberg-Witten はこの式を拡張して

$$Z = n_e a + n_m a_D \tag{8}$$

が量子論においても成立するものと仮定した．ここで a_D は，$a_D = \frac{\partial F}{\partial a}$ で定義され，

$$\tau(a) = \frac{da_D}{da} \tag{9}$$

を満足する．また $\{Q, Q^\dagger\} = E$ より次の質量と中心荷に関する不等式

$$M \geq \sqrt{2}|Z| \tag{10}$$

が成り立つ．これは量子論でも厳密に成り立つ式である．この二つの式を合わせるとまさに Bogomolny 不等式と呼ばれる式になる．

このように場 a と a_D は，有効 $U(1)$ 理論のなかに双対的に登場する．この双対性はプレポテンシャル $F(a)$ から決まる Kähler 計量

$$ds^2 = -\frac{i}{2}(da_D d\bar{a} - da d\bar{a}_D)$$

の持つ $SL(2, \boldsymbol{R})$ 対称性の部分群 $SL(2, \boldsymbol{Z})$

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix},$$
$$(ad - bc = 1,\ a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}) \tag{11}$$

とみなすことができる．$SL(2, \boldsymbol{Z})$ は二つの変換

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

により生成され，複素有効結合定数 $\tau = da_D/da$ について

$$S : \tau \to -\frac{1}{\tau},\ T : \tau \to \tau + 1 \tag{13}$$

のように作用する．T 変換は θ 角 θ_{eff} を 2π ずらす変換を表している．S 変換は物理的にどういう意味を持つだろうか．

ここで簡単のために θ 角を有する $U(1)$ ゲージ理論で S 変換の意味を考察する．$U(1)$ ゲージ場 A についての汎関数積分

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A e^{iS(A)}$$

を考えよう．その作用は

$$S(A) = \frac{1}{32\pi} \mathrm{Im} \int d^4x\ \tau (F_{mn} + i\tilde{F}^{mn})^2$$

で与えられる．ここで

$$\tilde{F}_{mn} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{mnpq} F^{pq}$$

である．ゲージ場についての積分測度 $\mathcal{D}A$ を場 F に関する汎関数積分に変数変換する．このとき F はビアンキ恒等式 $\partial_m \tilde{F}_{mn} = 0$ を満たすので，補助場 A_D を用意して積分を

$$\int \mathcal{D}A e^{iS} = \int \mathcal{D}F \mathcal{D}A_D e^{i(S+S')} \tag{14}$$

のように置き換えることができる．ここで

$$S' = \frac{1}{8\pi} \int d^4x (A_D)_n \partial_m \tilde{F}_{mn}.$$

式(14)は，F についてガウス積分が実行可能で結果は

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_D e^{iS(A_D)}$$

となる．ここで

$$S(A_D) = \frac{1}{32\pi} \mathrm{Im} \int d^4x\ \tau_D ((F_D)_{mn} + i(\tilde{F}_D)^{mn})^2,$$

$$\tau_D = \frac{-1}{\tau}.$$

である．A に双対な場 A_D で理論を書き直してみると，その結合定数は $\frac{-1}{\tau}$ になっている．このように，S 変換はある一つの理論の記述の仕方を双対変数に変えるような変換であるということができる．$N=2$ の場合も同様に双対変換が定義できて，S 変換のもとで Higgs 場 a が a_D に移り，ゲージ場 A が A_D に超対称的に変換することがわかる．

5. $N=2$ から $N=1$ へ
――モノポール凝縮と電荷の閉じ込め

$N=2$ 理論の真空は複素パラメーター $u=\langle \mathrm{tr}\,\phi^2\rangle$ で特徴づけられる．u のとりうる値の空間，モジュライ空間 $\mathcal{M}$ は $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ であり，真空は無限に縮退している．この理論に Higgs 場の微小な質量項を加えて摂動を与えると，$N=2$ 超対称性は陽に破れて，理論は $N=1$ Yang-Mills 理論と質量を持つ $N=1$ Higgs 場が結合した系になり，$N=1$ 超対称性のみが残る．$N=1$ Yang-Mills 理論は定性的にはある程度調べられていて，粒子の質量スペクトルが正になる(質量ギャップの存在)，カイラル対称性の破れ，クォークの閉じ込め等の性質を持っているであろうと信じられている．質量ギャップの存在は，一見質量がないように見えるゲージ場(グルオン)とその相棒のフェルミオン(グルーイノ)に質量を低エネルギーで与える機構の存在を示唆している．Seiberg-Witten 理論の基本的なアイデアはこの機構が，ある軽い荷電粒子の励起により，それが期待値を持つことによって起こるとしたことである．くりこみ群の解析によるとグルーイノ λ の期待値 $\langle\lambda\lambda\rangle$ は $m\Lambda^2$ のオーダーで，これからパラメーター $u=\langle \mathrm{tr}\,\phi^2\rangle$ の値を見積ると

$$u\sim\pm\frac{1}{m}\langle\lambda\lambda\rangle\sim\pm\Lambda^2 \tag{15}$$

になり u は Λ^2 に比例しその係数は m に依存しない．以下，適当に規格化して $u=\pm\Lambda^2$ でグルーイノが期待値を持つとしよう．もし上のようなシナリオが正しいとするならば，$N=2$ が回復する $m=0$ の場合でも $u=\pm\Lambda^2$ 付近で軽い荷電粒子の励起があるはずである．この粒子の正体は何であろうか．Bogomolny 質量不等式によると $N=2$ Yang-Mills 理論で零質量が生じるのは，等号が成り立つ状態，BPS(Bogomolny-Prasad-Sommerfield)状態のうちで，中心荷 Z が 0 になるときである．そこで最も簡単な仮定としてこの粒子が，モノポール，すなわち量子数 $(n_{\mathrm{e}}, n_{\mathrm{m}})=(0,1)$ を持つ状態であるとしよう．実際，モノポール場を強結合領域において有効作用に導入するとこのモノポール場が期待値を持ち，双対 $U(1)$ ゲージ場 W_D に質量を持たせることができる．この結果，反マイスナー効果によって電束が紐状になり $U(1)$ 電荷に働く力が逆 2 乗則から距離に比例する力に変わり電荷の閉じ込めが起こる．この強結合領域でモノポールが質量 0 になるという仮定は物理的にはもっともらしい．さらに，この仮定のもとで有効作用が決定できることを示そう．$u=\Lambda^2$ において，a と双対な場 a_D が 0 になる．$u=\Lambda^2$ 付近では，強結合領域のため Higgs 場 A とゲージ場 W_α による記述は良くないが，それと双対な場 A_D, $(W_D)_\alpha$ での記述に移ると摂動論が使えるようになる．双対場ではこの理論は $N=2U(1)$ ゲージ理論で記述できる．くりこみ群によれば有効結合定数が，1 ループ近似で

$$\tau_D=-\frac{i}{\pi}\log a_D$$

となる．ここで非可換ゲージ群の場合($a=\infty$ 付近)とは異なり，右辺の符号が負であることに注意しよう．これは $U(1)$ 理論が漸近自由でないことを表している．これから a 及び a_D の $u=\Lambda^2$ 付近での振る舞いが決定できて

$$a_D=c_0(u-\Lambda^2)+\cdots,$$

$$a=a_0+\frac{i}{\pi}c_0(u-\Lambda^2)\log(u-\Lambda^2)+\cdots,$$

となる．このように $(a_D(u), a(u))$ は u の関数として $u=\infty, \pm\Lambda^2$ に特異点を持つ(図 3)．例えば，$u=\infty$ 付近では

$$a_D=\frac{2ia}{\pi}\log\left(\frac{a}{\Lambda}\right)+\frac{ia}{\pi}+\cdots,$$

$$a=\sqrt{2u}+\cdots,$$

のように振る舞う．$(a_D(u), a(u))$ の具体的な形は

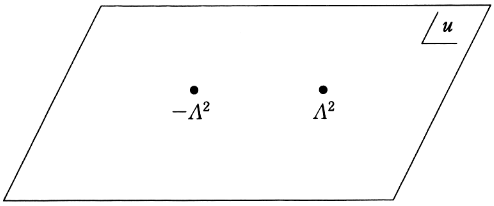


図 3 量子論におけるモジュライ空間．原点 $u=0$ において $SU(2)$ は回復しない．

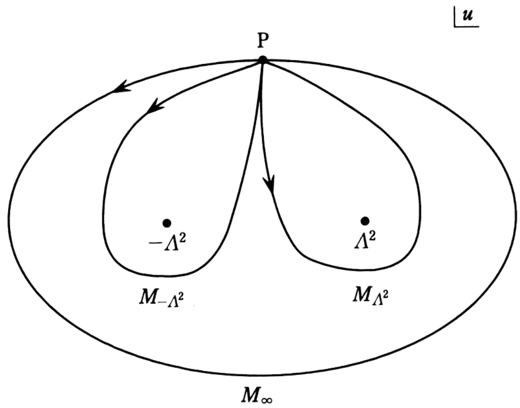


図 4　u 平面における点 Λ^2, ∞ のまわりのモノドロミー．

特異点のまわりのモノドロミー表現

$$\pi_1(\mathcal{M}-\{\infty, \Lambda^2, -\Lambda^2\}) \to SL(2, \boldsymbol{Z})$$

を調べることにより厳密に決定できる．例えば，特異点 $u=\infty$ の周囲を回ると $(a_D(u), a(u))$ は

$$a_D \to -a_D+2, \ a \to -a$$

のように変化し無限遠点 $u=\infty$ でのモノドロミー行列

$$M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が決まる．同様に $u=\Lambda^2$ でのモノドロミー行列が求まり，

$$M_{\Lambda^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．さらに $u=-\Lambda^2$ でのモノドロミー行列は $M_{-\Lambda^2}M_{\Lambda^2}=M_\infty$ より求められ(図 4)，

$$M_{-\Lambda^2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．これより $u=-\Lambda^2$ では電荷と磁荷をともに持つダイオン

$$(n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}) = (1, -1)$$

が質量 0 になることが示される．$M_\infty, M_{\Lambda^2}, M_{-\Lambda^2}$ は $SL(2, \boldsymbol{Z})$ の部分群

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2, \right.$$

$$\left. ad-bc=1, \ a, b, c, d \in \boldsymbol{Z} \right\}$$

に属していることがわかる．このとき有効結合定数 $\tau(a) = \dfrac{da_D/du}{da/du}$ は

$$\tau \to \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \tag{16}$$

と変換し，$\mathrm{Im}\,\tau = \dfrac{4\pi}{g_{\mathrm{eff}}^2}>0$ を満たす．これは，この理論の背後に複素上半平面 H を $\Gamma(2)$ で割った $H/\Gamma(2)$（図 5）をモデュライ空間に持つ楕円曲線または複素トーラスの存在を示唆している．実際，楕円曲線

$$y^2 = (x^2-\Lambda^4)(x-u) \tag{17}$$

を用いて，

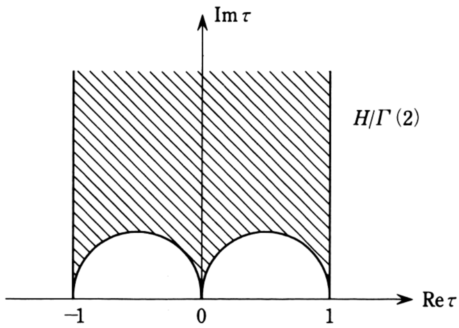


図 5　$H/\Gamma(2)$ の基本領域．

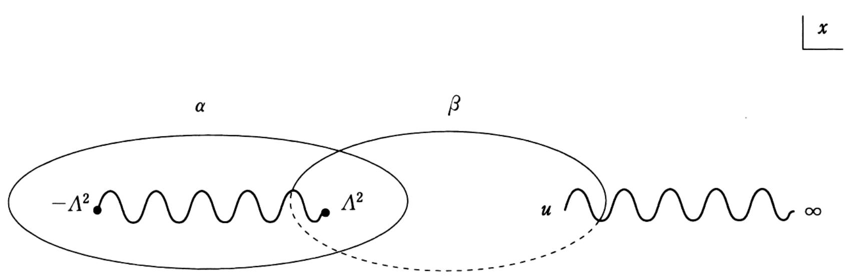


図 6　積分路の取り方．
$x=\pm\Lambda^2, u$ は分岐点，波線はカットを表す．

$$(a_D(u), a(u)) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left(\int_\beta \frac{dx(x-u)}{y}, \int_\alpha \frac{dx(x-u)}{y}\right) \tag{18}$$

と書け(図6)，この式が特異点のまわりで正しい振る舞いを持つことを示すことができる．これより，有効結合定数 τ は完全楕円積分

$$\tau = i\frac{K(k)}{K(\sqrt{1-k^2})},\ k = \sqrt{\frac{u-\Lambda^2}{u+\Lambda^2}} \tag{19}$$

で与えられ(図7)，プレポテンシャル $F(a)$ へのインスタントンの寄与を与える係数が

$$F_1 = \frac{1}{2^5},$$

$$F_2 = \frac{5}{2^{14}}, \cdots$$

等決定することができる．

我々は，$N=2$ Yang-Mills 理論のモジュライ空間の特異点の物理を調べることにより非摂動的な低エネルギー有効作用を厳密に決定でき，特にモノポール凝縮の点では電荷の閉じ込めが起きることを見てきた．このような現象が解析的に示されるということは，従来においては全く考えられなかったことであり，多くの素粒子物理学者に衝撃を与えることとなった．一方でこの理論は数学の分野にも新たな波紋を及ぼした．それが，いわゆる Seiberg-Witten 方程式の発見である．

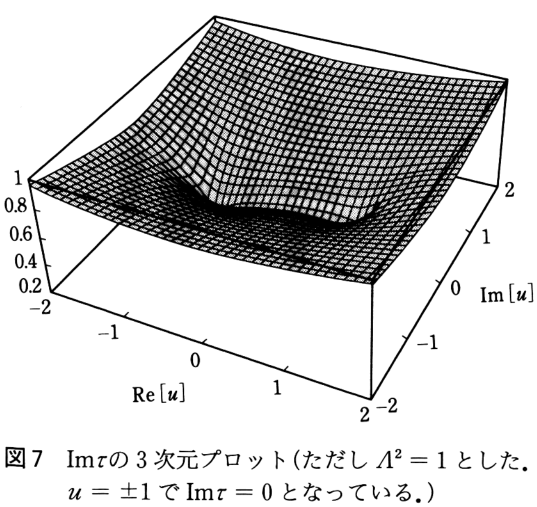


図7　Imτの3次元プロット(ただし $\Lambda^2=1$ とした．$u=\pm1$ で Im$\tau=0$ となっている．)

6．位相的場の理論への応用 ——Seiberg-Witten 方程式

1988年 Witten[5] は，4次元の位相的場の理論という新しい概念を提唱した．この理論は BRST 作用素と呼ばれるフェルミオン的な保存荷 Q で，$Q^2=0$ を満たすもので特徴付けられ，理論のエネルギー運動量テンソル T_{mn} が，BRST-完全形式で書かれる：

$$T_{mn}(x) = \{Q, S_{mn}(x)\}.$$

このため，BRST コホモロジーの下で観測量同士の相関関数が観測量の位置によらず，理論が定義されている多様体の位相不変量を与える．特に，$N=2$ 超対称 Yang-Mills 理論の $N=2$ 超電荷(の一部)を Q と同一視してできる位相的場の理論は，4次元多様体の Donaldson 不変量を与える．この操作はツイストと呼ばれ，ローレンツ群 $SO(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$ の $SU(2)_R$ と $\mathcal{R}$ 対称性 $SU(2)_\mathcal{R}$ の積 $SU(2)_R \times SU(2)_\mathcal{R}$ の対角部分 $SU(2)_{R'}$ を用いて，$SU(2)\times SU(2)_{R'}$ を理論の新たなローレンツ群とみなすことによって得られる．位相的場の理論の作用は

$$S^{\mathrm{top}} = \int d^4x \{Q, V\}$$

のように書かれ

$$S^{\mathrm{top}} = S^{N=2} - \frac{1}{4g^2}\int d^4x \,\mathrm{tr}\, F_{mn}\tilde{F}_{mn}$$

となる．物理量 $\mathcal{O}$ の汎関数積分

$$Z = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\lambda\mathcal{D}\phi e^{-S}\mathcal{O}$$

は結合定数 g に依存しないので，これを g^2 が小さい極限(WKB 近似)で評価してみよう．ゲージ場についての作用は

$$S^{\mathrm{top}}(A) = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x\sqrt{g}\,\mathrm{tr}(F_{mn}F^{mn} + F_{mn}\tilde{F}_{mn}) = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x\sqrt{g}\,\mathrm{tr}(F^+_{mn})^2$$

となるので，g が小さい極限では配位

$$F^+_{mn} \equiv \frac{1}{2}(F_{mn} + \tilde{F}_{mn}) = 0 \tag{20}$$

が汎関数積分に寄与することになる．このように，

反自己双対解(20)を求めることにより Z が決まる．Z は 4 次元多様体の Donaldson 不変量と呼ばれるものになることが示される．しかしゲージ群が非可換のために方程式(20)は非線形の偏微分方程式となり，解を求めるのはかなり難しい．

ところが，この汎関数積分を強結合領域で評価したらどうなるであろうか[6]．モノポールが質量 0 になる点 $u=\Lambda^2$ では，有効理論は双対 $U(1)$ ゲージ場と零質量モノポール場が結合した系になる．そこでの作用の関係する部分を書き下してみると

$$\begin{aligned} &S^{\rm top}(A, M)\\ &= -\frac{1}{g_D^2}\int d^4x\sqrt{g}\Big(\frac{1}{2}(F_{mn}^+)^2 + g^{mn}D_mM^\alpha D_nM_\alpha\\ &\qquad + \frac{1}{2}|M|^4 + \frac{1}{2}R|M|^2\Big)\\ &= -\frac{1}{g_D^2}\int d^4x\sqrt{g}\Big(\frac{1}{2}|F_{mn}^+ + \frac{i}{2}\bar{M}\Gamma_{mn}M|^2\\ &\qquad + |\Gamma^iD_iM|^2\Big) \end{aligned}$$

ここで Γ_m は Dirac 行列で $\Gamma_{mn}=\frac{1}{2}[\Gamma_m, \Gamma_n]$ である．双対結合定数 g_D が小さい極限では停留方程式

$$F_{mn}^+ = -\frac{i}{2}\bar{M}\Gamma_{mn}M,\ \Gamma^iD_iM=0 \qquad (21)$$

の解が汎関数積分に寄与することになる．この式はゲージ群が $U(1)$ なため，理論の解析がやりやすくなる．方程式(21)はモノポール方程式[7]または Seiberg-Witten 方程式と呼ばれ，最近の 4 次元多様体の位相不変量の構成の劇的な進展に必要不可欠なものになっている．

7．おわりに

この小論では，Seiberg-Witten による $N=2$ 超対称性を持つ場の理論の最近の進展について述べた．理論の非摂動論的構造が双対性と正則性という二つの手法を用いることによって解明できたことは非常に驚くべきことである．これと類似の事実は二次元の $N=2$ 超対称シグマ模型におけるミラー対称性を用いた世界面のインスタントン効果の計算にも見ることができる(細野氏の論説参照)．さらに，Seiberg-Witten 理論に関係するトピックとして，$N=1$ QCD における非アーベル的双対性，$N=2$ 超重力理論におけるブラックホール凝縮，超弦理論の $N=2$ 低エネルギー有効理論における双対性等があげられる[8]．今後も，双対性をキーワードとして超弦理論等の低エネルギー有効理論等の超対称場の理論の非摂動論的な構造に関する理解がさらに深まっていくであろう．

参考文献

1) N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B426** (1994) 19 ; **B431** (1994) 484.
2) 超対称性に関するテキストで基本的なものは
J. Wess and J. Bagger : Supersymmetry and Supergravity, 2nd ed., Princeton Univ. Press, 1992,
論文選集として
Supersymmetry (S. Ferrara, ed.), North-Holland, World Scientific 1987
を挙げておく．
3) N. Seiberg, *Phys. Lett.* **B206** (1988) 75.
4) E. Witten and D. I. Olive, *Phys. Lett.* **B78** (1978) 97.
ここでは，モノポールや Bogomolny 不等式などの基本事項について紹介できなかった．この辺に関しては，場の理論の教科書や
P. Goddard and D. I. Olive, *Rep. Prog. Phys.* **41** (1978) 91.
を参考にして下さい．
5) E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **117** (1988) 353.
6) E. Witten, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 5101.
7) E. Witten, *Math. Res. Lett.* **1** (1994) 769.
8) N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B435** (1995) 129 ;
A. Strominger, *Nucl. Phys.* **B451** (1995) 96 ;
C. M. Hull and P. K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B438** (1995) 109.
上記の文献で新しいものは WWW サーバー
http : //xxx.lanl.gov/から手に入る．

(いとう・かつし，京都大学・基礎物理学研究所)

Ⅱ. 素粒子物理と場

非可換幾何とゲージ理論

森田 克貞

1. はじめに

非可換という言葉は量子力学が誕生して以来物理の世界では日常語になったが，非可換幾何 (Non-Commutative Geometry, 略して，NCG) はあまり聞き慣れない名前だと思う．NCG でも，ディラック演算子とか，ヒルベルト空間とか，対合代数などの，量子力学で使われる用語を多用する．けれど，これは，NCG が点の集合としての空間概念のかわりに，関数の集合に力点をおく幾何学なので，作用素代数の理論などが登場することになるからである．それに比べると，ふつうの幾何学 (可換幾何) は，ずっとなじみ深い連続な空間の数学的性質を扱う．場の理論ではこのような空間を数学的なモデルとして採用し，その空間の上で定義された関数の集まりを考える．ところが，NCG が取り扱える数学的空間は，可換幾何ではカバーできない，連続的でない空間なども含むので，そのような空間が現実的なモデル空間を与えるかどうかが，問題になる．

NCG はフランスの数学者アラン・コンヌが 1980 年代中葉[1] までに作った新しい数学の分野で，だからまだ成人式を迎えていない．幾何学といっても，きわめて抽象的な定義や公理に基づいているので，その数学は物理屋にとっては精緻すぎて難しい．にもかかわらず，それが，(いまだマイナーなグループにではあるが) 素粒子論の分野でも注目を集めるようになったのは，コンヌが 1988 年 NCG におけるゲージ理論が電弱相互作用の統一理論と関係あることを指摘[2] し，ゲージ対称性の自発的破れと NCG の数学的アイデアを結びつけてからである．さらに，1990 年，コンヌ・ロット[3] は，NCG のゲージ理論が，素粒子の標準模型を再現することを証明した．これにより，NCG の取り扱える空間の中でも，もっとも簡単な離散空間である，ミンコウスキー空間と 2 点空間の積空間が，標準模型の背後にあると主張したわけである．NCG のゲージ理論は，数学者コンヌが数学者向けにかいた本[4]「Non-Commutative Geometry」(1994) の第 6 章に詳述されている．

この解説では，NCG のゲージ理論を，その本来の構成法とは異なるが，対称性の原理に基づく通常のゲージ理論と同じ枠組みで調べることを試みる．そのあと，公理論的側面に少し触れて，離散空間との関係を述べる．関連する他の数学的形式 (行列形式[5]，新しいシンボル χ を使う拡張された微分形式[6]，離散空間上のゲージ理論を平行移動の概念を用いて定式化する理論[7]) については，紙数の関係で割愛する．次節で，素粒子の標準模型の概略を述べるが，NCG のゲージ理論によって，標準模型を再構成する数学的手続きも一切省略する．それでも，その基本的なシナリオは明確になるはずである．

2. 素粒子の標準模型[8)]

現在の素粒子論によれば，あらゆる物質を構成する基本的要素は，クォーク，レプトンと呼ばれるスピン 1/2 のフェルミ粒子であると考えられている．これまでの歴史が示す教訓として，新しい実験上の発見により，いまわれわれの持っている物質観はいつかはひっくり返されるであろう．実際，これらの物質粒子の間の相互作用を記述する理論が標準模型として確立されてからすでに 20 年以上たつが，この間に非常に多くの新しい理論が発表され，それに基づく重要な実験も緻密に計画されているいま，標準模型は有効理論であって，基本理論ではないという見方が一般的となった．けれどもこの解説の目的からすると，まず，オリジナルな標準模型を簡単に振り返る必要がある．

標準模型はゲージ原理，対称性の自発的破れ，カイラルフェルミオンの存在という基本的な概念が精巧に組み合わさってできている．そのうち，ゲージ原理はあるゲージ群のもとでの理論の不変性（ゲージ不変性）の要請から，ゲージ場が導かれ，物質粒子の間の相互作用が決まるというものである．対称性の自発的破れとカイラルフェルミオンは，密接に関連している．

局所的な対称性（ゲージ対称性）の自発的破れの場合に必要なスピンゼロの場が，いわゆるヒッグス場である．ヒッグス場はふつう，ヒッグスポテンシャルと呼ばれる項（ラグランジアンの中には逆符号で現れる）により，ゲージ対称性の自発的破れを引き起こし，ゼロ質量のゲージ粒子のいくつかが有限の質量を獲得する源になっている．このような，ゲージ粒子の質量の生成機構をヒッグス機構というが，重くなったゲージ粒子に吸収された分だけ，ヒッグス場の成分のいくつかが，非物理的となるので，観測にかかる物理的なヒッグス粒子の数は必ずもとのヒッグス場の成分数より少ない．

クォークやレプトンがなぜカイラルフェルミオンとして存在するのかその理由はわからないが，とにかく，弱い相互作用では偶奇性が最大限に破れるという，実験事実がある．カイラルフェルミオンの質量項は，カイラル対称性を壊すので，標準模型のようなカイラルゲージ理論では，ゲージ対称性の自発的破れが起こらない限り，どの物質粒子もゼロ質量にとどまる．これは実験とあわない．これを救うのがまた，ヒッグス機構であって，フェルミオンの質量もゲージ対称性の自発的破れによって生成される．もちろん，カイラル対称性の自発的破れによってフェルミオンの質量を生成するというアイデアは，古くからあって，その場合，南部・ゴールドストーンの定理というのが働く．一般に，対称性が大域的な連続変換によって引き起こされる場合に成り立つこの定理は，ゼロ質量の N-G ボソンを予言する．ところが，大域的な対称性を局所的なものに拡張すれば，ゲージ不変性からゼロ質量にとどまるゲージ粒子も同時に予言される．このとき，ゲージ対称性の自発的破れが起こると，物理的自由度の入れ換えが起こり，ゼロ質量であった N-G ボソン（のいくつか）がゲージ粒子（のいくつか）に吸収され，重いゲージ粒子が誕生するという，ミラクルが起こることを，ヒッグスらは指摘したのである．ヒッグス機構を内蔵するゲージ理論をヤン・ミルズ・ヒッグスの理論という．

素粒子の標準模型の一方の柱は，電弱相互作用に関する統一ゲージ理論，グラショウ・ワインバーグ・サラムの理論（GWS 理論）であり，他方の柱は，クォークの関与する強い相互作用の微視的理論，量子色力学（QCD）である．QCD はクォークの持つカラーと呼ばれる内部自由度に関する（破れない）非可換ゲージ理論である．これは，漸近自由性を持ち，クォークの閉じ込めを説明すると期待されているが，これには触れない．それに対し，GWS 理論は，さきに述べたヤン・ミルズ・ヒッグスの理論であって，次の代表的なキーワードによって特徴づけられる．

[1]　カイラルな非可換ゲージ理論．ゲージ群は $G = SU(2)_L \times U(1)_Y$（グラショウ，1961）である．非可換な群 $SU(2)_L$ の添字 L は左巻のカイ

ラルフェルミオンにのみ作用することを示し，右巻のカイラルフェルミオンには働かない．可換な群 $U(1)_Y$ は弱ハイパーチャージという加法的な量子数（演算子）Y が生成する．$SU(2)_L$ の独立な生成子 3 つ（$I_{1,2,3}$）とあわせ，上の群の生成子は 3+1=4 個あり，その数だけ独立なゲージ場が存在する．そのうち 2 つは生成子 $I_{1,2}$ に対応して電荷を持ち，残りは生成子 I_3, Y に対応して電気的に中性である．

[2]　あらゆる素粒子の質量を生成するヒッグス機構（1966）．つまり，望ましいヒッグスポテンシャルを持つヒッグス場が引き金となって，非可換なゲージ対称性は電荷 $Q = I_3 + Y/2$ によって生成される $U(1)_{em}$ 対称性に自発的に破れている．これをシンボリックに，$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{em}$ と書く．その結果質量を獲得した荷電ゲージ粒子は，荷電弱ボソン $\mathrm{W}^{\pm}$ と呼ばれ，中性のゲージ粒子の方は，重い中性弱ボソン Z とよく知られた零質量の光子 γ になる．弱ボソンは弱い相互作用を，光子は電磁相互作用を媒介する．もっとも簡単なモデルで使われるヒッグス場はゲージ群 $SU(2)_L$ の二重項に属し，弱ハイパーチャージは $Y = 1$ である．これをヒッグス・ダブレットという．この場合，物理的な中性ヒッグス粒子が 1 つ予言されているが，いまのところまだ発見されていない．ヒッグス・ダブレット 2 つを仮定するモデルもあり，その場合には，荷電ヒッグス粒子も予言される．このようなヒッグス場とカイラルフェルミオンの湯川結合により，ゲージ対称性の自発的破れの結果，フェルミオンの質量項も導かれる．

[3]　くりこみ可能性．これを証明したのは，ト・フーフトである（1971）．この証明は場の理論の分水嶺といわれる．この証明に本質的なのは，ゲージ対称性が，自発的に破れることである．ただし，カイラルゲージ理論で量子異常（カイラルアノーマリー）があると，くりこみ可能性は壊れる．これにより，予言能力を獲得した GWS 理論は，多くの実験的検証を経たあと，1983 年には $\mathrm{W}^{\pm}$, Z も予言された質量のところに発見された．

[4]　物質粒子の世代構造．カイラルフェルミオンであるスピン 1/2 の素粒子は，3 世代存在し，各世代はレプトンと，カラーの自由度を持つクォークとをあわせて，15 個の粒子からなる．（表 1「素粒子の世代構造」参照．）クォークの 3 世代模型は，CP 不変性の破れに関して，小林誠と益川敏英が提唱（1973）した．

クォークは，q = u, d, s, c, b, t と書いて，順にアップ，ダウン，ストレンジ，チャーム，ボトム，トップクォークと呼び，レプトンは $\mathrm{l} = \nu_\mathrm{e}, \nu_\mu, \nu_\tau, \mathrm{e}, \mu, \tau$ と書いて電子的，ミュー粒子的，タウ粒子的ニュートリーノ（中性微子），電子，ミュー粒子，タウ粒子という．それらが 3 世代のカイラルフェルミオンをなしていることが表から読みとれよう．添字の L, R は左・右のカ

表 1　素粒子の世代構造

第 1 世代	第 2 世代	第 3 世代	弱ハイパーチャージ	電荷
$\begin{pmatrix} \nu_\mathrm{e} \\ \mathrm{e} \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	$Y_L = -1 \cdot 1_2$	$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
e_R	μ_R	τ_R	$Y_R = -2$	$Q = -1$
$\begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{d} \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \mathrm{c} \\ \mathrm{s} \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \mathrm{t} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix}_L$	$Y_L = \frac{1}{3} \cdot 1_2$	$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \mathrm{u}_R \\ \mathrm{d}_R \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathrm{c}_R \\ \mathrm{s}_R \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathrm{t}_R \\ \mathrm{b}_R \end{pmatrix}$	$Y_R = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$	$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

イラリティーを示す．L（レフト）フェルミオンは $SU(2)_L$ 二重項（ダブレット），R（ライト）フェルミオンは $SU(2)_L$ 一重項（シングレット）に属する*1)．二重項の上のメンバーは $I_3 = 1/2$，下のメンバーは $I_3 = -1/2$ を持ち，一重項の $I_3 = 0$ である．弱ハイパーチャージ Y はレフトとライトで値が違うので，添字 L, R をつけ，2 行目を除き 2 次の対角行列でその値を書いた（表の中の 1_2 は 2 次元の単位行列を示す）．電荷 $Q = I_3 + Y/2$ の値は素電荷を単位にして，やはり 2 行目を除き 2 次の対角行列で与えてある．また，各クォークはカラーと呼ばれる 3 つの別種の内部自由度を持ち，例えば，u クォークは $\mathrm{u}^r, \mathrm{u}^b, \mathrm{u}^g$ の 3 種存在*2)し，カラーのゲージ群 $SU(3)$ の基本表現に属する．このゲージ群に基づく非可換ゲージ理論が，前にふれた QCD である．

先に述べたように，現在，素粒子の標準模型といわれるのは，世代構造をしめす素粒子に対する，QCD と GWS 理論をあわせたもので，したがって，

$$\begin{aligned} &G = SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y \\ &\to H = SU(3) \times U(1)_{em} \end{aligned}$$

というヤン・ミルズ・ヒッグスのゲージ理論である．実験との一致は驚くほどよい[9]．

3. 非可換幾何におけるゲージ理論

標準模型において，ヒッグス場は本質的な役割を果たすにもかかわらず，その正体については，実験的になにもわかっていない*3)．むしろ，理論的な問題が山積しているのが実情である．しかし，1 つの可能性として，ゲージ場が物質粒子の間の相互作用を決定しているという，ゲージ原理の考えを，ヒッグス場の存在様式にも適用できないものだろうか．有名なカルツァ・クラインの理論では，高次元のゲージ理論を考えて，次元還元を行い，ヒッグス場が高次元のゲージ場の成分から生ずるとみなす．しかしながら，この次元還元には任意性が残る．

それに対し，NCG のゲージ理論では，対称性の自発的破れを離散的な時空構造に求めるので，高次元を考える必要がなく，したがって，次元還元も不要になる．ただいろいろな文献での記述が，公理論的側面に偏重しているといわれているので，この節では，通常のゲージ理論との比較を容易にすべく，ラグランジアン形式を採用する．本来の構成法については，次節で簡単に述べる．

質量のないディラック粒子の伝播は，次のラグランジアンで記述できる*4)．

$$\mathcal{L}_{D_0} = \bar{\psi} D_0 \psi \tag{1}$$

ここで，ψ は（ローレンツ変換に関して 4 成分の）ディラック場で，$\bar{\psi}$ は ψ のディラック共役と呼ばれ，行列の意味で，ψ のエルミート共役 $\psi^\dagger$ に比例する．また D_0 はディラックのガンマ行列と呼ばれる 4 次の正方行列で書かれる，自由なディラック演算子である．ディラック場はゲージ群 G の基本表現に属するとして，ゲージ原理を適用すれば，ゲージ変換 $\psi \to g\psi$, $g \in G$ のもとで不変なディラックラグランジアンは，D_0 を共変微分 $D_0 + A$ で置き換えることにより，

$$\mathcal{L}_{D_0+A} = \bar{\psi}(D_0 + A)\psi \tag{2}$$

*1) NCG のゲージ理論では，ゲージ群の表現を代数の表現から導くことにより，物質粒子の存在パターンを理論にインプットする．例えば，四元数体の既約表現とそのユニタリ群である $SU(2)$ の既約表現を比べるとよくわかるが，代数の表現を使う NCG のゲージ理論は物質粒子の世代構造に強く依存した理論である．それゆえ，その構成法は，自発的に破れたゲージ理論としてはゲージ群とその破れのパターンを与えれば決まるが，物質粒子はゲージ群の任意のユニタリ表現に属しうる，ヤン・ミルズ・ヒッグスの理論の構成法とは異なる．

*2) カラーの自由度が 3 つあるため，標準模型はカイラルゲージ理論であるにもかかわらず，量子異常が各世代でなくなっていて，そのくりこみ可能性を保証している．カラーに対し，クォークとレプトン共通にみられる自由度をフレーバーという．

*3) 量子効果による影響を考慮すれば，間接的情報は入る．例えば，文献 9) では，中性ヒッグス粒子の質量を 107(+67)(−45) GeV と見積もっている．

*4) 式を簡潔にするため，ローレンツ不変性を示す，縮約されたローレンツの添字は書かないことにする．以下で必要になる定義は，$D_0 = i\gamma^\mu \partial_\mu$ だけである．ここで，γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ はよく知られたディラック行列である．また，ゲージ場は $A = i\gamma^\mu A_\mu$，A_μ： 反エルミート，と書く．なお，プランク定数を 2π で割ったものと，真空中の光速度を 1 におく自然単位系と呼ばれるものを使う．

となる．ただし，ゲージ場は次の非斉次なゲージ変換

$$A \to gAg^\dagger + g[D_0, g^\dagger] \tag{3}$$

に従う．（ゲージ結合定数は A の中に含まれているものとする．）

ところで，コンヌは，ゲージ群 G をある対合代数 $\mathcal{A}$ のユニタリ元の集合 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ とみなす：$G = \mathcal{U}(\mathcal{A})$．そして，$\psi$ がゲージ群 G の表現に属するというとき，それは $\mathcal{A}$ の表現から誘導されると仮定する．群には積が定義されているが，代数には積とともに和も定義されているので，これから ψ はゲージ群 G の限られた表現にしか属しえないことがわかる．（1 粒子セクターのみを考えている．）

いまの場合は，代数 $\mathcal{A}$ は ψ の張るヒルベルト空間の上で表現されていると仮定することになる．その表現を ρ とすると，$\mathcal{A}$ の任意の元 a に対し，$\rho(a)\psi$ が定義されている．いまゲージ群の表現は a をユニタリ元 $g \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ に制限したときの $\rho(g)$ で与えられるので，ゲージ不変性は，(1) 式を

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{D_0+A} &= \sum_i \overline{(\rho(a_i)\psi)} D_0(\rho(a_i)\psi) \\ &= \sum_i \bar{\psi}\rho(a_i)^\dagger D_0(\rho(a_i)\psi)\end{aligned} \tag{4}$$

と書き直すことによって保証される[10]．ただし，ゲージ変換のもとで，すべての添字 i に対し，$\rho(a_i) \to \rho(a_i)\rho(g)^\dagger$ と約束する．ゲージ変換の行列 $\rho(g)$ はすべての添字 i に対し，a_i がユニタリ元 g になるときの $\rho(a_i) = \rho(g)$ によって定義されている．なぜ，i についての和が必要かというと，(4) 式を作るときの操作のもとで，ローレンツスカラー量 $\bar{\psi}\psi$ が不変だとすれば，$\sum_i a_i^\dagger a_i = 1$（単位行列）を仮定する[11] ことになるが，これからもし和がなければ，代数の元がすべてユニタリとなって矛盾するのである．以下，簡単のため，ρ という記号は省略する．

(4) 式は，交換子 $[A, B] = AB - BA$ を使って，$D_0(a_i\psi) = [D_0, a_i]\psi + a_i(D_0\psi)$ と変形すれば，(2) 式と同じく，D_0 を共変微分 $D_0 + A$ で置き換えることに相当するが，そのさい，ゲージ場が

$$A = \sum_i a_i^\dagger [D_0, a_i] \tag{5}$$

という，NCG のゲージ理論で与えられる表式と一致する点が違う．しかし，ゲージ変換のもとでは，

$$A \to \sum_i g a_i^\dagger [D_0, a_i g^\dagger] = gAg^\dagger + g[D_0, g^\dagger] \tag{6}$$

となって，(3) 式を再現する．

次に (5) 式に対する場の強さは，ゲージ共変な変換則に従う

$$G = dA + A^2, \ dA \equiv \sum_i [D_0, a_i^\dagger][D_0, a_i] \tag{7}$$

で与えられると定義する．これは，ヤン・ミルズの場の強さ F とは異なるけれど，コンヌは G の集合と F の集合を等値できる方法を使って，ヤン・ミルズのラグランジアンがこの G から，導けることを証明した．あるいは，補助場の消去法[11] を利用しても同じ結果が導ける．

ところで，NCG のゲージ理論に現れるゲージ場 (5) 式は自然にヒッグス場を含む形に一般化される．これは，微分演算子 D_0 を共変微分 $D_0 + A$ で置き換えるというゲージ理論の定式化では不可能である．いま，ディラック粒子が質量を持っている場合を考えると，(1) 式は

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} D \psi, \ \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix},$$

$$\bar{\psi} = (\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R), \ \psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi \tag{8}$$

となる．ここで，ディラック場はカイラリティーで分解した．レフト (L)，ライト (R) の 2 次元のカイラル空間では，ディラック演算子 D は 2×2 のブロック行列で，$D = D_0 + i\gamma_5 M$ と書いたとき，微分演算子 D_0 は対角型のブロック行列であるのに対し，質量行列 M は非対角型のブロック行列となる．（γ_5 は，$\gamma_5 D_0 + D_0 \gamma_5 = 0$ を満たすディラック行列で自乗すると単位行列になるように選んでいる．）

方程式 (1) から方程式 (4) を導く方法は，ディラック演算子が D_0 から D に置き換わっても何ら修正をうけないので，次のゲージ不変なディラックラグランジアンを与える．

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{D}} = \sum_i \overline{(a_i\psi)} D(a_i\psi) = \bar{\psi}\boldsymbol{D}\psi \qquad (9)$$

(いまや，a_i も対角型のブロック行列と考える必要がある．) ここで，

$$\boldsymbol{D} = D + \boldsymbol{A},\ \ \boldsymbol{A} = \sum_i a_i^\dagger [D, a_i] \qquad (10)$$

は一般化された共変微分で，$\boldsymbol{A}$を一般化されたゲージ場といい，ゲージ変換

$$\boldsymbol{A} \to \sum_i g a_i^\dagger [D, a_i g^\dagger] = g\boldsymbol{A}g^\dagger + g[D, g^\dagger] \qquad (11)$$

をうける．分解 $D = D_0 + i\gamma_5 M$ に応じて，

$$\boldsymbol{A} = A + i\gamma_5 \varPhi,$$
$$A = \sum_i a_i^\dagger [D_0, a_i],\ \ \varPhi = \sum_i a_i^\dagger [M, a_i] \qquad (12)$$

と書けるから，ゲージ場 A と新しいスカラー場 $\varPhi$ が1つにまとまることになる．さらに，$H = M + \varPhi$ とおけば，この H がヒッグス場の役割をする*5)．なお，フェルミオンはカイラルでないと，ゲージ不変な質量行列 M は a_i と交換してしまうので，その場合ヒッグス場は生まれない．

NCG のゲージ理論では，一般化されたゲージ場 $\boldsymbol{A}$に対する場の強さとして，(7) 式の G において，$D_0 \to D$ とおいた

$$\boldsymbol{G} = d\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2,\ \ d\boldsymbol{A} \equiv \sum_i [D, a_i^\dagger][D, a_i] \qquad (13)$$

を採用する．これはやはりゲージ共変な変換則に従う．この場の強さを用いて，ゲージ不変なヤン・ミルズ型のラグランジアンを作る．その際，NCG の微分代数の理論を用いる方法と，補助場の消去法[11]を使う方法がある．ここでは，後者に従って記述を進める．

このとき，ゲージ不変なラグランジアンから理論に現れる補助場を消去すると，ヤン・ミルズ・ヒッグスのラグランジアン $\mathcal{L}_{YMH}$ が導かれる．前節で述べたヒッグスポテンシャルは，この $\mathcal{L}_{YMH}$ に含まれるべきものなのだが，実は，いまの場合，ヒッグスポテンシャルがゼロになる[11]．つまり，H は対称性の自発的破れを引き起こさない．そのようなものは明らかにヒッグス場と同定できない．

しかしながら，この矛盾は世代の概念を用いると，容易にさけられる．いま，カイラルフェルミオンが，複数世代存在し，質量スペクトルに縮退がみられないとする．すると，補助場を消去して $\mathcal{L}_{YMH}$ を導く過程で望ましいヒッグスポテンシャルが生まれることがわかる[11]．つまり，ヒッグスポテンシャルの係数は，世代数を N_g としたとき，$N_g = 1$ ならゼロとなるが，$N_g > 1$ のとき正となるわけである．このときには，H は確かにヒッグス場と同定できる．この結論は，$N_g > 1$ のときにしか NCG のゲージ理論を場の理論とみなせないことを意味する．

4. 公理論的側面

複数世代の存在と素粒子の質量生成に関するヒッグス機構の間に，このような関係があるという可能性は，コンヌ・ロット[3]が，NCG を用いて，標準模型を再構成する中で指摘した．ここで，コンヌ・ロットが定式化した NCG のゲージ理論の公理論的側面を少し述べよう．

はじめにも述べたように，NCG では幾何学の概念が作用素代数の言葉に置き換えられる．そして，ユークリッド化した世界を考える．いま，対合を持つ単位元のある演算子代数 $\mathcal{A}$ と，(リーマン空間において定義された) 自由なディラック演算子 D_0，およびそれが働く，代数の表現空間である，フェルミオンのヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ があ

*5) 曽我見[12]はゲージ場とヒッグス場を含む一般化された共変微分を定義し，一般化されたゲージ理論を構成した．しかし，カイラルフェルミオンの相互作用はあらかじめ与えられたとするので，(12) 式のようなあらわな表式は用いていない．

る条件を満たすとき，このセットをコンヌの3組(spectral triple) という．これはちょうど，コンパクトなスピン・リーマン多様体を再現することが証明される．それゆえ，可換幾何はコンヌの3つ組 $(\mathcal{A}, D_0, \mathcal{H})$ で記述できるといえる．それに対し，質量行列を含むディラック演算子 D はスピン・リーマン多様体と2点空間に対応する2つの3つ組のテンソル積によって定義される．この場合，ゲージ場は連続な方向への接続形式であるのに対し，ヒッグス場は離散的な方向への接続形式と考えることができる．NCG のゲージ理論がスピン・リーマン多様体と2点空間をかけて得られる離散空間の上で定式化された場合，一般化されたゲージ場 (12) はこのように解釈されるので，フェルミオンの質量行列は2点空間において定義される「ディラック演算子」のような性質を付与され，ヒッグス場が空間の離散性に関連して現れることになる．つまり，ゲージ対称性の自発的破れは空間の離散性に起因すると考える．また，フェルミオンの表現内容が，代数の表現を考えることからくる制約をうける．そして，コンヌ・ロット[3] は，2節の表にあるカイラルフェルミオンを ψ にまとめ，代数を適当にとって，ψ に対するその作用を「うまく」選べば，標準模型を NCG のゲージ理論として再構成できることを示した．その際，NCG の微分代数の理論から，一般化されたヤン・ミルズ型の作用を求めると，複数世代の存在とヒッグス機構の間にさきに述べたような関連があることが導かれる．なお，NCG のゲージ理論ではラグランジアンではなく，「積分」を使った作用が直接扱われる．

実は，標準模型のような場合には，代数の表現が即ゲージ群の表現を与えない．上で「うまく」と書いたのは，この事情をいかに工夫して理論に乗せたかをさしている．これについて，のちにコンヌは文献 4) で使われた両側加群はある代数とその反代数のテンソル積上の加群を考えることになっていると指摘した[13]．(この場合にも，ラグランジアン形式が存在する．) 簡単にいえば，ディラック場 ψ とその荷電共役 ψ^c をペアーに組んだものに対するゲージ変換を2つの可換な因子に分け，各因子を代数の表現とその反表現に結びつける，というものである．例えば，標準模型の場合，ψ に作用する各因子はフレーバーとカラーの対称性に別々に対応し，弱ハイパーチャージに対応するものは可換なので両因子に現れる．コンヌは，この方法を J という記号で書かれる実構造を理論に導入することによって定式化し，新しく標準模型の代数とその表現を定めた．その代数というのは，非常に覚えやすく，$\mathcal{A} = C^{\infty}(M_4) \otimes (\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{H} \oplus M_3(\boldsymbol{C}))$ と書かれる．ここで，$C^{\infty}(M_4)$ は4次元のミンコウスキー空間上で定義された，無限回微分可能な関数の集合，$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ はそれぞれ複素数体，四元数体のことで，$M_3(\boldsymbol{C})$ は3次の複素正方行列の集合を表す．この代数のユニタリ群は標準模型のゲージ群に可換な群 $U(1)$ が1つ余分につくが，量子異常が各世代で相殺することにより，それが自然に落ちることが示せる[14]．NCG に基づいて標準模型を調べるその後の研究では，コンヌのこの新しい方法が基礎になっている[15]．

5. まとめにかえて

NCG のゲージ理論でゲージ対称性の自発的破れが保証されるのは，1) フェルミオンはカイラルであること，2) カイラルフェルミオンは世代で存在する，という場合に限られる[3]．ただし，理論は古典的な場の理論にとどまっている．

NCG のゲージ理論では，ディラック演算子が重要な役割を果たす．ゲージ場に関連した量では，それは，必ず交換子の形で理論に現れる．なぜかというと，NCG の微分（あるいは計量）が，そのような交換子（のノルム）を用いて定義されるからである．ただ，交換子をとると，時空の曲がりを表すゲージ場であるスピン接続が落ちる．それで，NCG の立場から，重力の理論を取り扱うときは，スペクトル作用[13] を用いる[16] などする．文献 16) の方法では，ヒッグス機構と世代構造の関係が生じないが，別の方法も考えられよう．い

ずれにしても，NCG のゲージ理論は重力の理論と標準模型を，単に異なるタイプのゲージ理論を組み合わせるというのではない，統一的な数学的枠組みで取り扱う．このような方向は，新しい統一理論の可能性を示唆しているように思われる．

最後になりましたが，大同工業大学の加瀬博巳教授，中部大学の奥村吉孝教授および名古屋大学の北門新作教授に深く感謝いたします．

文　献

1) A. Connes, Publ. Math. IHES N° **62** (1985), 257.
2) A. Connes, p.9 in The Interface of Mathematics and Particle Physics, Clarendon Press, Oxford, 1990.（1988 年の会議録.）
3) A. Connes and J. Lott, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **18B** (1990), 29.
4) A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, New York, 1994.
5) R. Coquereaux, G. Esposito-Farese and G. Vaillant, *Nucl. Phys.* **B353** (1991), 689.
R. Coquereaux, R. Häßling, N.A. Papadopoulous and F. Scheck, *Int. J. Mod. Phys.* **A7** (1992), 2809.
S. Naka and E. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **92** (1994), 189.
6) K. Morita and Y. Okumura, *Prog. Theor. Phys.* **91** (1994), 959; *Phys. Rev.* **50** (1994), 1016.
7) G. Konisi and T. Saito, *Prog. Theor. Phys.* **95** (1996), 657.
8) R.E. Marshak, Conceptual Fondations of MODERN PARTICLE PHYSICS, World Scientific, Singapore ···, 1993.
9) J. Erler and P. Langacker, 'Status of The Standard Model', UPR-0816-T, hep-ph/9809352 など.
10) H. Kase, K. Morita and Y. Okumura, hep-th/9812231.
11) A.H. Chamseddine, G. Felder and J. Frölich, *Phys. Lett.* **B296** (1992), 109; *Nucl. Phys.* **B395** (1993), 672.
12) I.S. Sogami, *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995), 117; **95** (1996), 637.
13) A. Connes, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 6194; *Comm. Math. Phys.* **182** (1996), 155.
14) E. Alvarez, J.M. Gracia-Bondía and C.P. Martín, *Phys. Lett.* **B364** (1995), 33.
15) C.P. Martín, J.M. Gracia-Bondía and J.C. Várilly, *Phys. Rep.* **294** (1998), 363 など.
16) A.H. Chamseddine, A. Connes, *Commun. Math. Phys.* **186** (1997), 731.

（もりた・かつさだ，名古屋大学大学院理学研究科）

III. 物性物理と場

III. 物性物理と場

物性物理におけるゲージ場理論

青木 秀夫

1. はじめに

国際会議に出るために海外旅行するときの楽しみの一つは，飛行機の中で十数時間本が読めることであろう．数年前カナダに行ったときは，バンクーバー空港で買った恐竜発掘の本を息もつかずに読んだが，今年（1996）はベルリンでの半導体物理学国際会議の折りに会場のベルリン工科大学の本屋で見つけたヒルベルト（D. Hilbert）の伝記[1)]ががっちりと書かれていて面白かった．ヒルベルトはいわずと知れた今世紀初頭の数学の巨星であるが，量子力学が思いつかれる以前にその基礎となる関数空間論を作っていた男，無二の親友ミンコフスキー（H. Minkowski）も相対論の基礎となる4次元の幾何学を作っていたという訳で，物理にもなじみが深い．1900年に，新世紀（即ち20世紀）への展望として提出された有名なヒルベルトの23の問題は，いまでも時々第何問題が解決したというような新聞記事が出る[2,3)]．さて，この伝記の後半に現れる，ヒルベルトの後継者にワイル（H. Weyl）がいる．この人こそ，ゲージ場の生みの親の一人といえる．私も学生の頃，彼の名著である 'Raum, Zeit, Materie'（「空間，時間，物質」：一般相対論提案の2年後に書かれた解説書で，リーマン幾何の発展すべき方向――微分幾何を示唆した）を英訳で読んだ覚えがある．固体物理においても，正に物質を空間に置くのだから，ゲージ場が問題になってよいはずだけれども，この可能性が真剣に検討され始めたのは，この十数年にすぎない．つまり，1980年代に湧き起こった物性物理の分数量子ホール効果[4)]と高温超伝導が人々の考え方を変革した訳で，一種の Sturm und Drang（疾風怒涛）といえる．歴史の妙を感じさせるのは，酸化物という絶縁体（高温超伝導の舞台）と，半導体界面（量子ホール効果の舞台）は一見無関係に思えるのに，数理科学的には「ゲージ場」によって理解することも可能という意味で関連しており，その二つのテーマが同年代に発生したことである[5)]．

ゲージ場は，物性物理では様々な起源で導入されている．最近の流れでは，

(i) 高温超伝導体で，強い電子間斥力により同一の軌道に2つの電子が来にくい．この「強い電子相関」を，拘束条件をゲージ場で表す，という図式に従いゲージ場が導入されている．詳しいことについては，文献6,7) などがある．

別の表現をすると，電子はスピンという内部自由度を持っているので，電子（または電子の抜け穴である正孔）が遍歴するときにスピン量子化軸が変化することによる Berry の位相[8)]をピックアップする．したがって，例えばある経路にそって電子が一周しても状態は元には戻らない[9,10)]．実際，このようなことは1次元空間ですら存在する．1次元の鎖上の原子の集まりで，2電子が同一の原

子に鉢合わせしたときのみ U という斥力相互作用する，とした模型を1次元ハバード模型というが，U が無限大のとき，この系ではスピン自由度と電荷自由度は分離するとされている．しかし，このときでも1次元では求められる厳密解（ベーテ仮説解）を見ると，電子の波数 k_j は

$$N_a k_j = 2\pi\left(I_j + (1/N)\sum_{\alpha} J_\alpha\right)$$

（N_a は原子数，I_j は離散的に量子化された波数を指定する整数，N は電子数，J_α はスピン波動関数の量子化波数を指定する整数）で与えられ，電荷状態を指定する k_j にスピン自由度も介入していることがわかる[11]．つまり，電荷が動くときは，スピン自由度に足を引っ張られる．この現象は，有限の U に対しても存在する（図1）[9]．

(ii) 本稿で主に話題にしたい分数量子ホール効果[4]では，2次元空間を外部磁場中で走る電子を考えるが，これを Chern–Simons（チャーン・サイモンズ）場の理論で扱うことができる．磁場中でも勿論電子は強く斥力相互作用しているから，分数量子ホール効果も「強い電子相関」の問題となるが，第3，4節で説明するように2次元空間で許されるフェルミオンとボソンの間の変換などが直観像を多彩にする．ここで現れた Chern–Simons 場というのは，数学的にはベクトル束の微分幾何学的に出てくる概念で[12]，空間の計量によらないある外微分形式の積分で表されるので，トポロジカルな場と呼ばれることもある．

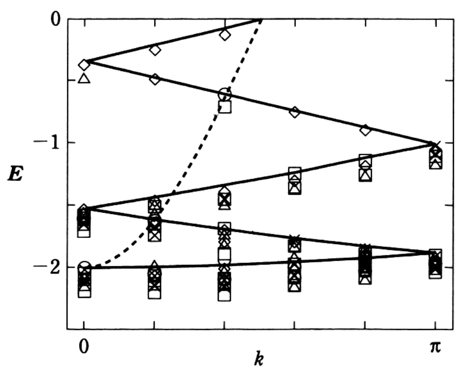


図1　強相関電子系（1原子の上には2電子が来ると U というエネルギーを損する）では，正孔（電子の穴）が（遷移確率 t で）動くときには，スピン自由度と干渉して質量が重くなる．有限系で $U = 100t$ の場合の励起準位を波数 k に対してプロットし，重いモードを実線で結んである[9]．点線は，比較のために電荷とスピンの絡みがない場合の分散を示す．

このような，物性物理と場の理論との交流は，例えば湯川国際セミナーとして「低次元場の理論と物性物理」が行われる[13]など近年特に活発になっている．歴史的にはゲージ場の考えを物性物理に導入したときに，最も劇的な効果の一つはゲージ対称性の破れ，つまり超流動や超伝導であろう．よって，これから説き起こすことにしよう．

2. ゲージ対称性の破れ — 超伝導

超伝導について教科書をひも解くと，「超伝導は単に電気抵抗がゼロになることではない，もしそうなら完全導体（結晶格子欠陥やフォノンがない導体）も超伝導と呼ばねばならなくなる．そうではなく，外部磁場を完全に排除するマイスナー効果が超伝導の本質である」と強調されている．これをさらにゲージ場の言葉でいえば，超伝導とはゲージ対称性が自発的に破れた状態に他ならない．

「対称性の自発的破れ」というのは，相転移の統計力学で導入する大切な概念の一つである．つまり，磁性体を例にとると，元のハミルトニアンはスピン空間での回転対称性を持っているから，スピンが揃ったとしてもどこか特定の方向を向く理由は何もない．にもかかわらず，低温ではどちらかの方向を向いてしまう．一般に，二次相転移の秩序相側（普通は低温側）ではこのようなことが起っている．超流体や超伝導体も然りで，そこで揃ってどこかの方向を向いてしまうのは，波動関数の位相である．但し波動関数といっても，ただの1粒子波動関数ではなく，ボース凝縮した condensate の波動関数である．では，これとマイスナー効果

(完全反磁性）とはどうつながるのだろうか．それは，ゲージ場（いまの場合，電磁場）の横成分は，対称性の破れがあると遮蔽電流（マイスナー効果の源）を生む，という事情があるせいである．

それでは，電磁場中の電流密度 $\boldsymbol{j}$ は，量子力学ではどう表されるだろうか．波動関数

$$\psi(\boldsymbol{r}) \equiv |\psi(\boldsymbol{r})| e^{i\varphi(\boldsymbol{r})}$$

に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j} &= \frac{e\hbar}{2m}[\psi^*(-i\nabla\psi) + \psi(i\nabla\psi^*)] \\ &= \frac{e\hbar}{m}|\psi|^2\nabla\varphi\end{aligned}$$

となる（$-e$ は電子の電荷，m は質量）．ところが，波動関数の位相には不定性があって，各場所で

$$\psi \to \psi(\boldsymbol{r})e^{i\chi(\boldsymbol{r})}$$

という変換（局所 $U(1)$ ゲージ変換）をしても差し支えない．だから，φ の微分を生に含む上の表式はゲージ変換をすると変化してしまうのでまずい．ゲージ不変にするには，ψ に対する微分 ∇ を共変微分 $\boldsymbol{D} = \nabla - i(e/c\hbar)\boldsymbol{A}$ に変えて

$$\boldsymbol{j} = \frac{e\hbar}{m}|\psi|^2\left(\nabla\varphi - \frac{e}{c\hbar}\boldsymbol{A}\right)$$

とすればよい．

この電流密度を，具体的に整数量子ホール系（2次元空間内の自由電子に垂直に強磁場をかけ，不規則ポテンシャルを加えた系）に対して青木により求められた例を図2に示す[14]．ここでは，空間的に局在した波動関数が確かに回転電流を持つこと，端のある系ではこの電流は端にそって流れる反磁性電流になることが見てとれる．

図2では強磁場の例を挙げた．ハミルトニアンも磁場中では運動エネルギー項 $-(1/2m)\nabla^2$ において ∇ を $\boldsymbol{D}$ に置き換えて

$$-\frac{1}{2m}\left(\nabla + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi = E\psi$$

というシュレディンガー方程式を解かねばならないが，このランダウ量子化問題を強磁場で実行したことになる．

一方，磁場が弱くて摂動と見なしてよい場合はどうだろう．このとき $|\psi|$ はあまり変わらないとして，$\boldsymbol{j} \propto \nabla\varphi - (e/c\hbar)\boldsymbol{A}$ に注目して，$\nabla\varphi$ 項と $(e/c\hbar)\boldsymbol{A}$ 項の意味をそれぞれ見てみよう（$\boldsymbol{A}$ の取り方にはゲージ変換の不定性があるので，この分割はゲージ不変でないが，そのあたりは読者に考えていただこう）．すると $\nabla\varphi$ 項は，電子の軌道角運動量 L_z に比例するから，これによって生じる軌道磁気モーメントは磁場を印加すればこれとカップルして軌道常磁性を生むことになる．

一方，磁場により誘起された電流の方は $\boldsymbol{A}$ に比例する項により，

$$\boldsymbol{j}_D \propto -(e/c\hbar)\boldsymbol{A}$$

と表される（ロンドン方程式）．これにより生じ

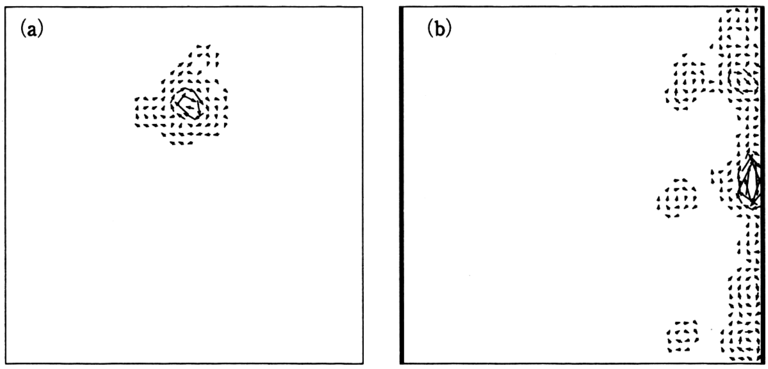


図2 整数量子ホール系（2次元空間内の自由電子に垂直に強磁場をかけ，不規則ポテンシャルを加えた系）の固有波動関数に対する電流密度の典型例[14]．
(a) 周期的境界条件で，不規則性のために空間的に局在した波動関数，(b) 端（ポテンシャル障壁，太線）のある場合．

た磁気モーメントは古典電磁気学でもおなじみの「レンツの法則」により外部磁場をキャンセルする方向，つまり反磁性電流 $\boldsymbol{j}_D$ に対応する．物性の教科書では，これから孤立した原子や分子の磁性は，A^2 の期待値に比例するランジュバン反磁性や，$\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{A}$ とが掛かった項に対応するヴァン・ヴレック常磁性に起因する，というふうに説く．

さて，電子は電荷を持っているから，電流が流れれば「ビオ・サバールの法則」により磁場が生じる，というマックスウェル方程式

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$$

も気にしなければならない（$\mathrm{div}\boldsymbol{j}_D = 0$ とするため，$\boldsymbol{A}$ は横成分（$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$）というゲージを選んでいる）．この式と，反磁性電流 $\boldsymbol{j}_D = (e^2/mc)|\psi|^2\boldsymbol{A}$ をカップルさせると，

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\lambda^{-2}\boldsymbol{A},$$
$$\lambda^2 = mc^2/4\pi e^2|\psi|^2$$

という $\boldsymbol{A}$ が空間的に減衰する式が得られ，遮蔽電流によって磁場 $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ がキャンセルされるために，磁場は λ くらいの「遮蔽長」までしか系の内部に入れないことがわかる．ところが，原子・分子では $|\psi|^2 \sim 1/a_B^3$（a_B はボーア半径 ~ 0.5Å）であり，λ は 100Å の程度となり分子サイズに位べれば大きく，レンツの法則で磁場が遮蔽されることは気にしなくてよいことになる．

さて，原子・分子でなくバルクの金属ではどうなるだろうか．このときも弱磁場ではドラマチックなことはなく，ランダウ（L.D. Landau）が 1930 年に計算したように，弱いランダウ反磁性が生じるだけである．ところが，バルク中の電子が「1 つの波動関数」に落ち込んでしまったらどうであろうか．勿論，起伝導体において巨視的な N 個の電子が，クーパー対をつくって BCS 状態に凝縮することを考えている．

凝縮しているということは，遮蔽長 $\lambda \propto 1/\sqrt{e^2|\psi|^2}$ の式において，$|\psi|^2$ は（1/体積）ではなく（N/ 体積）となって，やはり $|\psi|^2 \sim 1/a_B^3$ となることに現れ，この度は巨視的な系に数百Å しか磁場が侵入しないという訳だから，完全反磁性となる．この λ は超伝導でロンドンの侵入長と呼ばれるもので，典型的な超伝導体であるアルミニウムでは 160Å である．

このような状況で電磁場を支配している方程式

$$(\nabla^2 - M^2)\boldsymbol{A} = 0$$

（$M = 1/\lambda^2 \neq 0$）は，光子場に対するものにもかかわらず，場の理論でいうところの質量を持った（massive）ベクトル場の方程式になっているのが特徴である．但し詳しくは，以上で無視した $\boldsymbol{A}$ の縦成分は電子気体の密度波（プラズマ振動）とカップルするので，massive なベクトル場の完全な記述にはこれを含める必要がある．また，最近ではランダウ量子化が問題となる強磁場における超伝導も論じられている[15]．

上の議論で本質的だった「1 つの波動関数」に落ち込むということは，楊（C.N. Yang）[26] に従い「非対角長距離秩序」がある，と表現することもできる．実際，与えられた電子模型に対してこの秩序を検出する（例えばクーパー対の相関関数を見る）理論的試みは精力的になされており，斥力相互作用を持つ銅と酸素の軌道を取り入れた模型においても対相関が発達し得ることや，さらに基本的なハバード模型でも電子の対の $U(1)$ ゲージ対称性の破れを量子モンテカルロ法を用いて検出したという黒木等による最近の報告もある[16]．

3. 2 次元空間 — 不思議な次元

さて，ゲージ対称性の破れの別の面白い例が量子ホール液体である．しかし，これに話をもっていくには，先ずフェルミオンとボソンの間の変換を導入する必要がある．普通の 3 次元空間では，パウリ（W. Pauli）が 1940 年に示したように粒子のスピンが半奇数ならばフェルミオン，整数ならばボソン，という「スピンと統計との関係」[17] があるから，ボソンをフェルミオンに自由に変換したりはできない．但し，3 次元空間でもボソンとフェルミオンが互いに移り渡ること自体は例が

ない訳ではない．よく知られているのはスカーム(T.H.R. Skyrme)によって与えられた，整数スピン粒子の場から $S=1/2$ を持つ粒子（skyrmion）が出現する例[18]や，トフーフト（G. 't Hooft）らによる，ボース場からモノポール（フェルミオン）が出現する例[19]であろう．

しかし，2次元空間が面白いのは，こんな特別な例を考えなくても粒子の統計性を一般的に変える可能性を内蔵していることである．これは，粒子の世界線を追跡したときに，3次元空間ではある粒子が別の粒子に何回巻き付かれたかなどということは，数えようと思っても，世界線を連続変形して絡みをほどくことができるので，とても定義できない．ところが，2次元では図3に例示するように，この巻き数を曖昧さなく数えることができる．巻かれたときの波動関数の位相を問題にすればよいので，次のようなことを考えることができる．

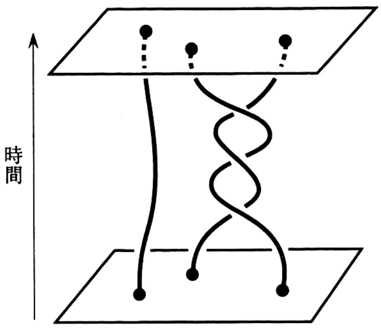


図 3 粒子の世界線を追跡したときに，2次元空間ではある粒子が別の粒子に何回巻き付かれたかを，曖昧さなく数えることができる．

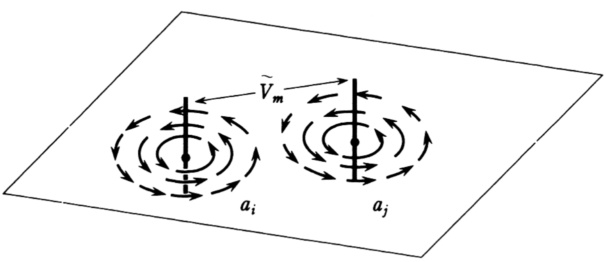


図 4 各粒子に太さが無視できる磁束（黒線）を貼りつける．渦状のベクトルは磁束によるベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{a}$ を示す．$\widetilde{V}_m$ は磁束付き電子同志の相互作用．

例えば，図4に示すように，各粒子に太さが無視できるフィラメント状の磁束を磁束量子 Φ_0 を整数個だけ貼りつけたとする．この磁束は図に示したような渦状のベクトル・ポテンシャルを持つ．こんな磁束があると，それによるAB（Aharonov–Bohm）効果のために波動関数は磁束を回る毎に余計な位相をもらうから，その位相は図5に示したようになる．

このような「電子＋磁束 m 本」複合体を考え，それら2個を互いに他の周りを回したときのAB効果による位相を計算すると，磁束量子を偶数本つけたときは複合粒子はボソン，奇数本のときはフェルミオンであることがわかる．これは，粒子の交換に際して電子本来のフェルミ統計性からくる因子と，荷電 $-e$ が他電子に貼られた磁束 $m\Phi_0$ の周りを回るときに獲得するAB位相の「合計」として $(-1)^{m+1}$ という因子が出てくるためと理解できる．これが「複合粒子（composite particle）」の考え方である．場の理論ではChern–Simons場を導入したことに他ならない．

これは，式の上で統計変換をもたらすゲージ変換を導入して確かめることもできる．それはフェルミオン場の演算子 $\Psi(\boldsymbol{x})$ を，1次元でのJordan–Wigner変換を2次元に拡張したような感じの

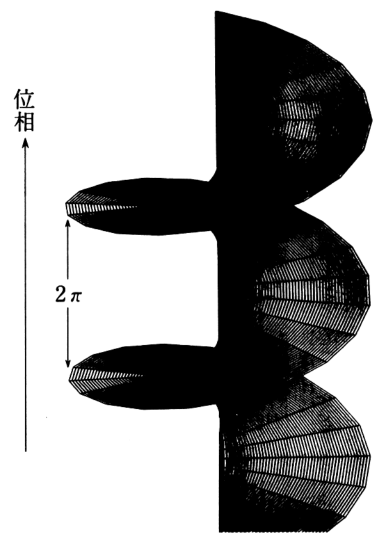


図 5 フィラメント状磁束（太線）の周りの波動関数の位相．

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = e^{-iJ(\boldsymbol{x})}\,\Psi(\boldsymbol{x}),$$
$$J(\boldsymbol{x}) \equiv -m\int d\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

という変換（ρ は電子の密度演算子）により複合粒子の場の演算子 $\Phi(\boldsymbol{x})$ にしてみよう．ここで，$J^\dagger = J$ なので，この変換はユニタリである．

ここで，$\theta(\boldsymbol{x})$ は 2 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ が x 軸となす角度で，図 5 でわかるように $\boldsymbol{x}=0$ を特異点に持つ．よって，第一量子化では

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_i \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)$$

より

$$J(\boldsymbol{x}) = -m\sum_j \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)$$

となることからわかるように，この変換は 2 粒子が同じ位置に来たときには定義できない．しかし，電子間にはパウリの排他則が働くため，平行スピン 2 電子が同じ位置に来ることはなく，さらにクーロン斥力が働くため，反平行スピン 2 電子でも同位置に来ることはない．但し，m が奇数で複合粒子がボース統計に従うときには，粒子間にデルタ関数型斥力相互作用を加える必要がある[20]．

次に複合粒子の統計性を場の演算子の交換関係から見てみよう．すると，量子力学でお馴染みの

$$e^A\,B\,e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{ad}_A)^n}{n!}\,B \qquad (\text{但し，}\ \mathrm{ad}_A\cdot B \equiv [A,B])$$

を用いて

$$\left\{\Phi(\boldsymbol{x}), \Phi^\dagger(\boldsymbol{x}')\right\} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \ \ (m\text{ が偶数}),$$
$$\left[\Phi(\boldsymbol{x}), \Phi^\dagger(\boldsymbol{x}')\right] = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \ \ (m\text{ が奇数})$$

が得られる．つまり，複合粒子は確かに m が偶数のときにはフェルミオン，奇数のときにはボソンとなる．

この変換により，ハミルトニアンがどう変わるかを見ると，共変微分 $\boldsymbol{D}$ を $e^{iJ(\boldsymbol{x})}\,\Phi(\boldsymbol{x})$ に演算させると

$$\boldsymbol{D}\,\Psi(\boldsymbol{x}) = \left(\nabla - i\frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)\left[e^{iJ(\boldsymbol{x})}\,\Phi(\boldsymbol{x})\right]$$
$$= e^{iJ(\boldsymbol{x})}\left[\boldsymbol{D}-\nabla J(\boldsymbol{x})\right]\Phi(\boldsymbol{x})$$

となる．ここで $\nabla J(\boldsymbol{x}) = (e/\hbar c)\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ と表すと $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ は，

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \equiv -\frac{m\Phi_0}{2\pi}\int d\boldsymbol{x}'\,\rho(\boldsymbol{x}')\,\nabla_{\boldsymbol{x}}\,\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

である．これを用いると，Φ に対してはハミルトニアン中の共変微分 $\boldsymbol{D}$ を

$$\nabla - i\frac{e}{c\hbar}\left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\right]$$

とすればよいことがわかる．この $\boldsymbol{a}$ が，粒子の統計性を変換したために現れる「統計的（Chern–Simons）ゲージ場」に他ならない．実際，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ は第一量子化では，各粒子の位置に磁束量子を m 本貼り付けたときのベクトル・ポテンシャルになっている．

2 次元ではさらに大胆に，フェルミオンとボソンの中間の統計である分数統計を考えることもでき，整数でない磁束を貼り付けることにより分数統計性を持つエニオン（anyon）と呼ばれる粒子を構成できる[21,22]．しかし，そこまで行かなくとも，フェルミオンとボソンだけを考える範囲内ですら，統計変換のような面白いことができる，というのが味噌である．ちなみに，ディラック（Dirac）は，その有名な量子力学の教科書[23]で既に，多体波動関数は完全反対称（フェルミオン）か完全対称（ボソン）とは限らないのに，自然はこの折角の（いまでいえばエニオンの）可能性を活用していない，と文句をいっているのは流石といえる．

4. ゲージ対称性の破れ—量子ホール液体

ゲージ不変性は既に整数量子ホール効果を理解する上で有用である[4,24]．しかし，分数量子ホール状態は，超伝導と同様ゲージ対称性の破れた状態である点で際だっている[4]．実際，上で導入した磁束を貼りつける，という操作は，分数量子ホール状態（量子液体なので分数量子ホール液体と呼ばれる）に超伝導に類似の非対角長距離秩序があることにガーヴィン（Girvin）ら[27]が注目したことに端を発している．

それには，先ず分数量子ホール効果の複合粒子理論[4,7]を見る必要がある．分数量子ホール系は，

2 次元空間に閉じこめられた，クーロン斥力相互作用する電子に，垂直に強磁場（サイクロトロン・エネルギーの方がクーロン・エネルギーより大きいような）をかけた系である．ここで，一様外部磁場を $m\Phi_0$ ごとに人工的に束ね太さゼロのフィラメント状にして，各電子に付着させて減らすことを考える．量子ホール系においては電子密度は，電子がランダウ準位をどの位満たしているか，という「ランダウ準位占有率 ν」で指定される．言い替えると，ν^{-1} が 1 電子当たりの外部磁束量子の本数である．これから，複合粒子にとっての実効的な磁場 $\boldsymbol{B}_{\rm eff} \equiv \nabla \times [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})]$ は，電子密度の空間平均 $n_e \equiv \overline{\rho(\boldsymbol{x})}$ とそこからの揺らぎ $\delta\rho(\boldsymbol{x}) \equiv \rho(\boldsymbol{x}) - n_e$ を使って

$$\begin{aligned} B_{\rm eff} &= B - m\Phi_0\,\rho(\boldsymbol{x}) \\ &= \left(\nu^{-1} - m\right)\Phi_0 n_e - m\Phi_0\,\delta\rho(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

と表せ，空間平均をとると $\overline{\delta\rho} = 0$ だから

$$\overline{B_{\rm eff}} = \left(\nu^{-1} - m\right)\Phi_0 n_e$$

となる．

よって，ランダウ準位占有率が $\nu = 1/(2k+1)$ のように奇数分母のとき，各電子に付着させる磁束量子の数を $m = 2k+1$ にとると，実効磁場は平均的には丁度ゼロになってしまう．よって，平均場近似では磁場がないときの 2 次元ボース粒子系と等価となり，基底状態はもちろんボース凝縮状態である．

一方，$\nu = 1/2k$ のように偶数分母のときは，m を $2k$ という偶数にとると，実効磁場はやはり平均的にはゼロになり，平均場近似では磁場がないときのフェルミ粒子系となる．そして，それから磁場がずれると複合粒子は平均的には $B_{\rm eff} = B - B_{\nu=1/2k}$ を感じるため，$\nu = N/(2kN+1)$（N：整数）のとき，外部磁場を磁束量子 $2k$ 本ずつに束ねた電子に貼ると，残存した磁束は 1 粒子あたり $(1/N)\Phi_0$ なので，平均場近似では $\nu = N/(2kN+1)$ 分数量子ホール状態は複合フェルミオンの $\nu = N$ 整数量子ホール状態ということになる．この系列（図 6）は，実験をよく説明する．

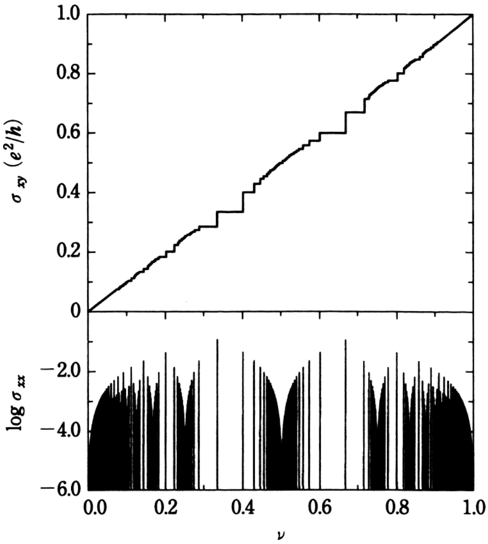


図 6　平均場近似では $\nu = N/(2kN \pm 1)$ 分数量子ホール状態は，各電子に $2k$ 本の磁束量子を貼りつけた複合フェルミオンの $\nu = N$ 整数量子ホール状態と見なせる．これから期待されるホール伝導度 σ_{xy} と縦（電場方向）伝導度 σ_{xx} の量子化系列を示す．

2 次元空間では粒子の世界線の巻き数が良い量子数になる，と前節で述べたが，このことはまた様々に面白い見方を可能にする．その一つは，「電荷–磁束双対性（charge-flux duality）」である．2 次元系に荷電粒子と磁束が共存するとき，電荷と磁束とを交換しても理論は不変となる．これは，2 次元では，粒子と磁束の世界線が絡み合うときにのみ AB 効果（より一般には Berry の位相）が生じるが，世界線が絡み合うときに作用積分がピックアップする位相だけが問題となるから，粒子と磁束を入れ換えても問題は同じことになる．この双対性を用いて，分数量子ホール効果の階層構造を説明することもできる．

さて，2 節の最後一寸触れたように，超流動体や超伝導体が持つ長距離秩序は特別なものであり，それらが「巨視的量子現象」である[26]．ボース凝縮状態に特有な秩序は，ボース場の演算子 Φ で表される密度行列（場の同時刻 2 点相関）

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \langle\, \Phi(\boldsymbol{x})\, \Phi^{\dagger}(\boldsymbol{x}') \,\rangle$$

により表される．ボース凝縮状態では，この量は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ がどんなに離れても，粒子密度と同程度

の有限の大きさにとどまる（すなわち，場に長距離相関がある）．これは普通では考えられない特殊な状況であるが，ボース凝縮系では正に「1つの波動関数」に落ち込んでいるためにこうなる．密度行列の秩序が $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$（非対角成分）に現れることから，この秩序を非対角長距離秩序（off-diagonal long-range order, ODLRO）と呼ぶ．

さて，量子ホール系はフェルミ粒子系であり，電子自身はパウリ原理に阻まれて1粒子状態に凝縮することなどありえない．この点では同じフェルミ粒子系である通常の伝導電子系や液体 ^{3}He の場合も同様であるが，これらの系ではフェルミオンが2個で対を作ることによってボソンのように振舞い，ボース凝縮状態が実現され得る．これに対し量子ホール液体では，生の電子場 Ψ には長距離相関など存在しない．

しかし，複合粒子描像では量子ホール状態を複合ボソンのボース凝縮状態と見なせた．すると，長距離秩序を持ちそうな相関関数は，普通のフェルミオン場ではなく，複合ボソンの場の演算子 Φ に対する

$$\langle \Phi(\boldsymbol{x})\, \Phi^\dagger(\boldsymbol{x}') \rangle$$

であろう．これが正に，ガーヴィンら[27]の指摘したことに対応する．即ち，複合ボソン場の相関関数は，ラフリン状態においては $\langle \Phi(\boldsymbol{x})\, \Phi^\dagger(\boldsymbol{x}') \rangle \propto |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{-1/2\nu}$ という長距離秩序（代数的相関）を持つことが示される．つまり，3次元ボース系のような $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') =$ 一定という長距離秩序は持ちえないが，2次元で許される中では最も長距離的な巾型相関となる．

面白いことに，この巾型相関の指数は，電子相関から生じるにもかかわらず，電子間相互作用の大きさにはよらず，統計的ゲージ場の強さ（$\propto 1/\nu$）にのみ依存する．トポロジカル項とも呼ばれる Chern–Simons 場に起因するので，この秩序はトポロジカルな秩序とも呼ばれる．

複合ボソンを，これとは異なった定式化で定義して，このボソン生成演算子 $A^\dagger$ を N 粒子量子ホール状態と $(N+1)$ 粒子量子ホール状態ではさむと，

$$\langle\, A^\dagger(\boldsymbol{x}) \,\rangle = O(1)$$

という具合に1のオーダーの期待値を持つようにもできることがリード（Read）によって示されている[28]．こうすると，ボース系においてボース凝縮が有限の秩序パラメータ $\langle\, \Phi^\dagger(\boldsymbol{x}) \,\rangle$ に対応したように，$\langle\, A^\dagger(\boldsymbol{x}) \,\rangle$ が量子ホール系における秩序パラメータということになる．

さて，以上で主役を演じている磁束を貼り付ける（一様磁場をフィラメントに収縮させる）という操作はかなり強引なものであり，平均場近似などが良いはずはないと一見思われる．実際，$\nu = 1/2$ で無磁場中の複合フェルミオンとなる，といっても，揺らぎの効果は異様に大きいはずである．つまり，揺らぎ $\delta\rho(\boldsymbol{x})$ に伴う統計的ベクトル・ポテンシャル

$$\delta \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \equiv -\frac{m\Phi_0}{2\pi} \int d\boldsymbol{x}'\, \delta\rho(\boldsymbol{x}')\, \nabla\, \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

の影響は半端ではなかろう．

普通のクーロン相互作用する電子系には一般に，「相互作用が強くても適当なくりこみを行えば，フェルミ面を持つ縮退したフェルミオン系と見なせ，これをフェルミ液体と呼ぶ」というランダウによる伝統的描像がある．最近の強相関系の物理では，この描像が崩れることもあるのではないか，ということが興味の一つになっている．$\nu = 1/2$ の分数量子ホール系では，磁束のベクトル・ポテンシャルの揺らぎという特異な場合にどうなるか，という問題となる．これが特に面白いのは，第2節で説明したように，ゲージ場の横成分は，$\nu = 1/2$ のように対称性が破れていない場合は遮蔽されないので，ゲージ場の長距離相互作用が非フェルミ液体的な振舞いをもたらすかもしれない，という訳である．

但し，このような問題を調べるときに，1粒子グリーン関数だけでなく，応答関数まで注意を払う必要があり，不用意なことをすると Kohn の定理が破れてしまう．Kohn の定理というのは，並進対称な系では重心運動は相対座標とカップルしないことをいう．つまり磁場中の自由電子はランダウ

量子化のためにサイクロトロン・エネルギー $\hbar\omega_c$ を持つ電磁波を共鳴吸収するが，電磁波の波長が十分長いと共鳴は電子系の重心運動だけをピックアップするので，電子間相互作用が存在しても自由電子と同じ共鳴エネルギーを持つ．よって，電荷密度の相関関数（線形応答理論から，この相関関数は系に振動数 ω 波数 q の電磁波をかけたときの光学吸収を表す）を見たときに，相関関数の極（吸収エネルギーに対応）は，q で展開したときに

$$\omega_q = \omega_c + O(q^2)$$

のように，長波長の極限（$q \to 0$）では $\omega_q \to \omega_c$ となっていなければならない．

フェルミオンを磁束付着によりボソンに変換した描像では，分数量子ホール液体がボソンの超流体になるといったが，このアナロジーでは，この ω_q のモードは超流体中に立つ集団励起モードとなる．電気的中性の超流体（例えば液体ヘリウム）では，この集団励起は $q \to 0$（長波長）で q に比例するフォノン的モードとなり，$1/q \sim$ ヘリウムの原子半径ではロトンとよばれる窪みを持つのはよく知られている．これに対し電荷を持った粒子（例えば，いま考えている電子をボソンに変換したもの）の超流体では，このギャップレス・フォノン的モードは有限のプラズモン・エネルギーまで押し上げられる．分数量子ホール効果の詳しい解説は，文献 4, 7) などを参照してほしい．

5. 電荷–スピンの絡みとゲージ場 ——スピン波，skyrmion

さて，いままでは無視した電子のスピンはどうなるのだろうか．実は，普通の分数量子ホール液体ではスピンは揃っている．一見，強磁場の中だからスピンはゼーマン・エネルギーを得するために一斉に磁場方向に揃う，と思いたくなるがそういう訳ではない．実は，これは電子間の強い斥力相互作用のためである．電荷の間に働くのはクーロン力だから，スピンとは無関係な力であり，そのためにスピンが揃うなんて変，と思うかもしれないが，決してそうではない．パウリの原理というものがあり，これは平行スピン間のみに働き反平行スピン間には働かないから，これによりスピン状態は，粒子が相互作用する様子を支配して，結果的にスピン依存の相互作用となる．早い話が，スピンが完璧に揃っていれば電子同志は同一位置に全く来られず，斥力相互作用のためにエネルギーを損することは回避できる．これが真の最低エネルギーを与えるなら，基底状態ではスピンが揃っているであろう．分数量子ホール液体が正にこうなっている．勿論ゼーマン・エネルギーは現実には存在するが，これは代表的なクーロン・エネルギーの数パーセントにすぎないし，ゼーマン・エネルギーをゼロと仮定した理論結果や，磁場を 2 次元面から傾けてゼーマン・エネルギーとクーロン・エネルギーの比を変える実験によっても確認されている．

このスピンが揃った状態は，スピン回転対称性を自発的に破った状態だから，対称性を回復させるための南部–ゴールドストーン・モードが立つ．これは強磁性スピン波モードに他ならない．これに対しても複合粒子描像を適用することができる[29, 30]．スピン波の「固さ」（揃ったスピン達を捻るのに必要なエネルギー）は，電子間の交換相互作用で決まっているが，量子ホール系ではランダウ量子化された波動関数の間の交換相互作用である．ランダウ準位が丁度詰まっている場合（整数量子ホール状態）では，スピン波の固さは，超流動ヘリウムのファインマン理論をランダウ波動関数のスピン自由度に拡張して計算される．これを分数量子ホール状態に拡張するには，電子に磁束を貼りつければよいが，すると図 4 のように磁束付き電子同志の相互作用 $\widetilde{V}_m$ は弱くなる．磁束を貼ると他の電子は遠ざかる（相対角運動量 m が大きくなる）ので，クーロン斥力が弱くなるのである．ランダウ準位が整数個詰まっている場合には，超流動ヘリウムのフォノン・ロトン集団励起に対するファインマンの理論を量子ホール系のスピン自由

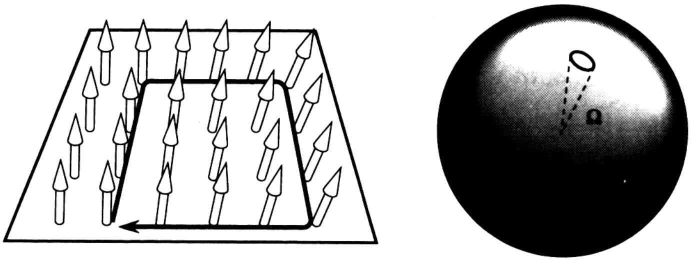


図 7 スピンが揃っていなくて捻れていると，粒子をある経路にそって動かしたとき（左図）に獲得する Berry の位相は，その経路にそったスピンの方向 $\boldsymbol{m}$ を単位球面上にプロット（右図）したときに描く立体角 Ω（の 1/2）になる．

度に適用できるが，複合粒子像によりこれを分数量子ホール状態に拡張したことになる．最近では，オックスフォードのグループ等により実験的にもこのスピン波の分散が光の非弾性（スピン・ラマン）散乱により観測されるようになって[31]，理論と比較されている．

ランダウ準位が丁度詰まっている場合も電子相関の効果でスピンは揃うが，詰まり方を整数からずらすと，スピン強磁性は急速に壊れる．最近では，これが系の素励起である skyrmion で記述されている．これは，次のようなことである[32]．先ず上で述べたスピンの固さ ρ_s は，スピンの方向 $\boldsymbol{m}$ が空間的に揺らぐとエネルギーが上がるが，その比例係数

$$\mathcal{L}_{\rm spin} = \frac{1}{2}\rho_s \int d\boldsymbol{r}(\nabla \boldsymbol{m})^2$$

に他ならない．

これ以外にも，スピン自由度が存在するときに粒子が歩き回ると，Berry の位相をピックアップしてしまう．具体的に，スピンが揃っていなくて捻れているとき，粒子をある微小な経路にそって動かしたときに獲得する Berry の位相は，その経路にそったスピンの方向 $\boldsymbol{m}$ を単位球面上にプロットしたときに描く立体角（の 1/2）になる（図 7）．この立体角 Ω は，経路が微小のときには，$\boldsymbol{m}$ の変化の仕方の「曲率」(場の理論では skyrmion 密度といわれる量）で表され，

$$d\Omega = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{m}\cdot\partial_\mu \boldsymbol{m}\times\partial_\nu \boldsymbol{m} dxdy$$

となる．

この位相の起源が Berry 位相なのか AB 効果なのか電子は区別しないから，磁束 $\Phi = (\Omega/4\pi)\Phi_0$ があるための AB 効果により発生したと思うと，量子ホール系には特徴があって，磁束を入れるとそこに電荷が流入する（図 8）．実際，ランダウ準位占有率 ν がこの系を特徴付けるが，ν は磁束量子 Φ_0 1 本当たりの電子数であることを思い出すと，この占有率を一定に保つためには，磁束量子を 1 本突き通す毎に電荷を νe だけそこに注入することになる．

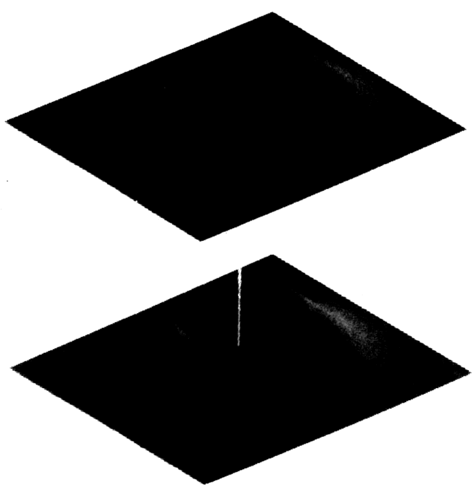


図 8 量子ホール系では，磁束を入れるとそこに電荷が出入りする．この図では，基底波動関数が磁束（白線）を入れると中心に向かって縮む様子を示す．

結局，スピンの揺らぎに付随したこの電荷

$$\delta\rho = -\frac{\nu e}{8\pi}\epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{m}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{m}\times\partial_\nu\boldsymbol{m}$$

の相互作用があり，有効ラグランジアンには

$$\mathcal{L}_{\rm skyrmion} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{q}}\frac{2\pi}{q}\delta\rho_{-\boldsymbol{q}}\delta\rho_{\boldsymbol{q}}$$

が付け加わる．

このように，一見電荷だけを問題にすればよさそうな量子液体においても，ゲージ場から発生するBerryの位相により，スピンを考えることが本質的となる．考えてみればフェルミオン系は，スピンと統計の関係により必ずスピンを持たねばならないから，スピンの影響を考慮することはフェルミオン系においては不可欠ということになる．

6. おわりに—トポロジカル励起，AB vs Berryの位相，メゾスコピックス

量子ホール系について詳しく説明したが，磁場のない2次元強相関系においても，ゲージ対称性が自発的に破れた状態を考えることも可能である[7]．強相関極限では同一の原子上に2個の電子は来られないので，どの原子も上向きスピン ↑，下向きスピン ↓ または正孔（ホロン）のいずれかを持つ．このとき，スピン励起（スピノン）の生成演算子 $S^\dagger_{i\sigma}$，ホロンの生成演算子 $h^\dagger_i$ を局所ゲージ変換して，$e^{-i\phi_i}S^\dagger_{i\sigma}$，$e^{-i\phi_i}h^\dagger_i$ としてもハミルトニアンは不変となる．もしこのゲージ対称性が自発的に破れればスピノンやホロンの超流動ということになる．

さらに時間反転対称性が破れることも許した場合「磁束相（flux phase）」という状態が一頃考えられたことがある．つまり，外部磁場がないのに電子相関の故に時間反転対称性が自発的に破れる可能性であり，そこでもChern–Simons場で記述することができる[7]．この相では，自発的環状電流が特定の向きに流れているので，時間反転が崩れている訳である．いまでは，このような相が基底状態になることはないようであると考えられている．

さて，フェルミオンとボソンの間の変換を2次元空間の専売特許のように説明したが，1次元空間でも，$S=1/2$ を持つボソンの教科書的な例がある．鎖状に1次元に並んだスピンに対して，スピンとスピンの間に $J\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j(J>0)$ という隣合うスピンを反対向きにするような相互作用を持つ反強磁性ハイゼンベルク模型を考えよう．これは $CuCl_2$ 等の1次元的物質で実現される．このとき，低次元程大きくなる量子揺らぎのために，基底状態は単純な ↑↓↑↓ ··· という状態では有り得なく，長距離秩序を持つ反強磁性体ではないが，$\langle\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+R}\rangle$ というスピンの2点相関をみると，$1/R$ のように距離の巾でゆっくり減衰する．この意味で，1次元で許される範囲で頑張った反強磁性体である．この状態からのスピン波励起はどうなるだろうか．実は，量子揺らぎのせいで長距離秩序は崩れているにもかかわらず，スピン波モードが存在することがデクロワゾー・ピアソン（des Cloizeaux–Pearson）により見いだされている．スピンを励起するには，スピンを1個反転させてやればよいから，↓ $(S=-1/2)$ が ↑ $(S=1/2)$ になったと思うと $S=1$ の励起のように一見思えるが，実はこの励起は $S=1/2$ のスピン波（ボソン），より正確にはキンク（位相励起，phason）の対から成る[33]．つまり，スピン1/2のボソンである．

実は，1次元でのキンク励起，空間2次元での渦糸励起，空間3次元でのskyrmion励起は皆トポロジカルな構造（皆，ある点回りの巻き数（winding number，整数）を持つ）という点で共通しており，ひとまとめにしてトポロジカル励起と呼ぶこともできる．実際ウィーグマン（P. Wiegmann）は，ロンドン方程式から出発するアプローチを一般化して，トポロジカル超伝導と彼が呼ぶ理論を展開している[34]．実際，数学的にもゲージ場理論とトポロジーは密接な関連がある[35]．

トポロジカルという点では，物性物理におけるトポロジカルな欠陥，つまり転位（dislocation）や回位（disclination）のように，粒子の走る舞台そ

のものがトポロジカルに面白い構造をしているときに，これをゲージ場で定式化するという試みもある[36]．

また，以上で何カ所かで触れたBerryの位相も，物性物理の他の様々な場面でも重要な役割を果たす[8, 37〜39]．最近では，多体相互作用する系に磁束を通し，多体波動関数がどのように変化するか，という多体系でのAB効果にも興味が持たれている．特に，超伝導の基本単位となるクーパー対の形成が，多体系のAB磁束への応答性から検出できるかどうかが興味深いが，普通はこれは単に電荷の単位が e から $2e$ になること（異常磁束量子化）で検出するが，実際はこのテストは紛らわしいことが多く，系全体を巻き込む長周期の応答性を見ることがより敏感なテストとなることが草部・青木により示されている[40]．多体系の固有エネルギーはAB磁束の関数であるが，様々な準位が交差したり反発したりすることと関連しており，これを，多体波動関数（数学的にはヒルベルト空間内のファイバー束）に付随した仮想的なゲージ場を反映したBerryの位相と見ることもできる[41]．上で電子がBerryの位相とAB効果を区別しないことに触れたが，Aharonov等はBerryの位相とAB効果があらわに共存する場合の物理を最近論じている[42]．

最近では，メゾスコピック系（ミクロとマクロの中間である系）に強磁場をかけたときに，このメゾスコピック分数量子ホール系に色々と面白い物理現象があることが見いだされている．例えば量子ドット中に閉じこめられた分数量子ホール系では，特定の（魔法数の）全角運動量でエネルギーが安定化する．これはKohnの定理により普通は残念ながら光学吸収で観測はできないが，二重量子ドットにすれば観測されることが提案されている[43]．また有限幅を持つ量子細線での端状態にも興味が持たれている．このような系でのChern–Simons理論[44]や複合粒子理論[45]がどうなるかも調べられ始めている．

Weylで始めた話なので，最後もWeylで締めくくると，彼には“Symmetry”という好著[46]がある．これを見ると，空間を並進させたときの対称性が彼の執着であったことがわかるが，中には今日のフラレンを予見させるような図（図9）もある．考えてみると球面状のフラレンも，六角格子に五角形というトポロジカルな欠陥を入れて作られたものである．ゲージ場はいまや80歳の年配となったが，この先の発展がますます楽しみという感じである．

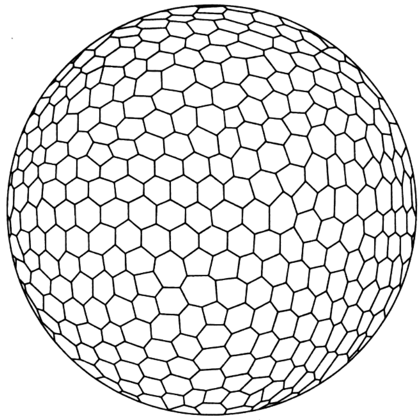


図9 放散虫（原生動物）の酸化シリコン骨格（Weyl: Symmetry[46]中の図に基づき再描）．

参考文献

1) C. Reid: Hilbert (Springer, 1996).
2) 一松信：ヒルベルト数学の問題（共立出版，1969）．
3) 数学セミナー「ヒルベルト23の問題」特集（1994年2月号）．
4) 安藤恒也（編）：量子効果と磁場（丸善，1995）；吉岡大二郎：量子ホール効果（岩波書店，1998）；中島龍也，青木秀夫：多体電子論III 分数量子ホール効果（東大出版会，1999）．
5) 量子ホール効果の歴史については青木秀夫：数理科学1994年5月号 p.17（別冊数理科学「現代物理の展開」(1997) p.117に再録）；植村泰忠：数理科学1994年9月号 p.66 別冊数理科学「20世紀の物理学」(1998) p.169に再録を参照．
6) 福山秀敏：固体物理 **25** (1990) 790; 久保木一浩，数理科学1996年1月号 p.59.
7) 青木秀夫，川上則雄，永長直人（編）：物理学論文選集「物性物理における場の理論的方法」（日本物理学会，1995）；永長直人：物性論における場の量子論，電子相関における場の量子論（岩波書店，1995, 1998）．
8) 青木秀夫：数理科学1991年11月号 p.11および本別冊 p.107.
9) K. Kusakabe and H. Aoki: *Phys. Rev.* B **44** (1991) 7863.

10) 草部浩一，青木秀夫：多体電子論 I 強磁性（東大出版会，1998）．
11) B. Douçot and X.G. Wen: *Phys. Rev.* B **40** (1989) 2719.
12) 例えば和達三樹：微分・位相幾何（岩波書店，1996）．
13) 青木秀夫：固体物理 **26** (1991) 913.
14) H. Aoki: *J. Phys.* C **17**, 1875 (1984).
15) H. Akera *et al*: *Physica* B **184**, 337 (1993); 明楽浩史：固体物理 **27** (1992) 955.
16) K. Kuroki and H. Aoki: *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4400 (1996); *Phys. Rev.* B **56** (1997) R14287; 黒木和彦，青木秀夫：多体電子論 II 超伝導（東大出版会，1999）．
17) Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics Vol.4, *Quantum Electrodynamics* 2ed. (Pergamon, 1982), §25.
18) T.H.R. Skyrm: *Proc. Roy. Soc.* A **260** (1961) 127.
19) P. Hasenfratz and G. 't Hooft: *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 1119.
20) Z.F. Ezawa, M. Hotta and A. Iwazaki: *Phys. Rev.* B **46** (1992) 7765.
21) 例えば青木秀夫：科学 **61** (1991) 388. 分数統計は 1 次元空間でも「分数排他統計」と呼ばれる拡張により考えられており，これについては例えば加藤雄介，倉本義夫，固体物理 **31**, 117 (1996).
22) F. Wilczek: *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity* (World Scientific, 1990).
23) P.A.M. Dirac: *The Principles of Quantum Mechanics* 3rd ed. and 4th ed. (Oxford University Press, 1947, 1958).
24) K. Shizuya: *Phys. Rev.* B **45**, 11143 (1992); 静谷謙一：数理科学 1996 年 1 月号 p.39.
25) 青木秀夫：数理科学 1996 年 1 月号 p.46.
26) C.N. Yang: *Rev. Mod. Phys.* **34**, 694 (1962).
27) S.M. Girvin and A.H. MacDonald: *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1252 (1987).
28) N. Read: *Phys. Rev. Lett.* **62**, 86 (1989).
29) T. Nakajima and H. Aoki: *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3568 (1994).
30) 中島龍也・青木秀夫：日本物理学会誌 **50** (1995) 725.
31) H.D.M. Davies *et al*: *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 4095.
32) S.M. Girvin and A.H. MacDonald in *Novel Quantum Liquids in Low-Dimensional Semiconductor Structures* ed. by S. Das Sarma and A. Pinczuk (Wiley, 1995).
33) L.D. Fadeev and L.A. Takhtajan: *Phys. Lett.* **85A**, 375 (1981).
34) P. Wiegmann in *Field Theory, Topology and Condensed Matter Physics* ed. by H.B. Geyer (Springer, 1995) p.177.
35) 例えば深谷賢治：ゲージ理論とトポロジー（シュプリンガー・フェアラーク東京，1995）を参照．
36) 例えば V.A. Osipov: *J. Phys. Condens. Matter* **7**, 89 (1995).
37) M.V. Berry: *Proc. Roy. Soc.* **A392** (1984) 45.
38) F. Wilczek and A. Shapere (eds): *Geometric Phases in Physics* (World Scientific, 1989).
39) 倉辻比呂志：パリティ **3**, No.9, p.26.
40) K. Kusakabe and H. Aoki: *J. Phys. Soc. Jpn* **65**, 2772 (1996); R. Arita *et al*, *ibid*, **66** (1997) 2086.
41) V.E. Korepin and A.C.T. Wu: *Int. J. Modern Phys.* B **5** (1991) 497.
42) Y. Aharonov *et al*: *Phys. Rev. Lett.* **73**, 918 (1994).
43) H. Imamura, P.A. Maksym and H. Aoki: *Phys. Rev.* B **53**, 12613 (1996).
44) N. Nagaosa and M. Kohmoto: *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4294.
45) J.K. Jain and T. Kawamura: *Europhys. Lett.* **29**, 321 (1995).
46) H. Weyl: *Symmetry* (Princeton Univ. Press, 1952, 1980 にも再発行).

（あおき・ひでお，東京大学大学院理学系研究科）

(2+1)次元時空上の場の理論とトポロジー

松山 豊樹

1. (2+1)次元がおもしろい！

我々が住んでいる世界は，時間 1 次元，空間 3 次元の (3+1) 次元時空である．彼女(氏)とデートの待ち合わせをするときは，「どこどこの交差点(縦・横) のデパートの何階 (高さ) に何時に (時間)．」といった 4 つの座標の指定が必要となる．これから紹介するのは，空間の次元が 1 次元低い (2+1) 次元の世界の話である．平面の上を動き回る，例えば電子とかをイメージしたら良いと思う．「何だ，次元を 1 次元減らしただけか．その分 (3+1) 次元より簡単なんじゃない？　文字通り次元の低い話だね．」と思う人がいるかもしれない．「ところがどっこい，そうじゃない！」ということを，初めに声を大にして言っておこうと思う．

実に (2+1) 次元とは不思議な次元である．それを最も如実に示すのが，Chern-Simons 項[1]と呼ばれる位相幾何学的な意味を持つ項が存在することである．その辺の事情を，具体例をあげて見てみよう．通常の (3+1) 次元の Maxwell の電磁力学を思い出してほしい．Maxwell 方程式は作用

$$I = \int dt d^2x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right) \tag{1}$$

から最小作用の原理に従って Euler-Lagrange 方程式として導かれる．(正確にはそれと Bianchi の恒等式が Maxwell 方程式．) ここで

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

で，A_μ は電磁場を表す 4 元ベクトル・ポテンシャルである．μ, ν は 0,1,2,3 の値をとる添字で，上下に繰返し現れるときはその添字について 0 から 3 までのたし上げを行う (Einstein の縮約)．J^μ は保存カレントで，電荷密度 ρ $(=J^0)$ と電流密度 J^i $(i=1,2,3)$ を 4 元ベクトルにまとめたものである．さて，Maxwell 方程式の中でも，いま特に

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \tag{2}$$

に注目しよう．(ここで $E^i = F^{0i}$, $(i=1,2,3)$ である．) これは，電荷から電場 $\vec{E}$ が湧き出すことを示すいわゆる Gauss の法則である．

ところで，作用 (1) 式は任意関数 $\theta(x)$ を用いて

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x) \tag{3}$$

と変換しても不変に保たれる．変換 (3) 式をゲージ変換，A_μ をゲージ場と呼ぶ．このとき理論はゲージ対称性を持つと言い，その理論をゲージ理論と呼ぶ．ゲージ対称性にもいろいろなタイプがありそれは群論によって分類される．いまの場合は $U(1)$ 群をゲージ群に持つ $U(1)$ ゲージ理論である．詳細には立ち入らないが，ゲージ対称性は，電荷の保存や場の量子化に際してくりこみ可能性を保証する等々の非常に重要な意味を持つ対称性である．

さて，いよいよ (2+1) 次元の場合を考える．作用として次のものが可能である[2]．

$$I = \int dtd^2x\left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}+\frac{M}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha\partial_\beta A_\gamma+A_\alpha J^\alpha\right) \quad (4)$$

今度は(2+1)次元なので α, β, γ は0,1,2を走る．$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ は3階の完全反対称擬テンソルと呼ばれ，$\varepsilon^{012}=1$ で，肩の添字012を偶数回互換(2つを入れ換える操作）したものが1，奇数回互換したものが-1と定義される．M は位相質量[3]と呼ばれるパラメータである．(4)式を見ると，第1項は(1)式の第1項の(2+1)次元版そのものである．この項をMaxwell項と呼ぼう．第2項が，いわゆるChern-Simons項と呼ばれる位相幾何学的意味を持つ項である．(いまは $U(1)$ 群を考えている．$SU(2)$ 群の場合を後で議論する．) この項は(2+1)次元ではじめて可能である．しかも，この項は先に述べたゲージ不変性を損うことなしに作用の中に許される．(ある条件下で．) 実際，ゲージ変換(3)式を作用(4)式に対して行うと

$$I \to I+\frac{M}{2}\int dtd^2x\partial_\alpha(\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\theta\partial_\beta A_\gamma) \quad (5)$$

となる．おつりの項が出てくるが，その項の被積分関数が全微分の形をしているので，表面積分に書き換えられる．いま考えている積分領域は(2+1)次元時空で，その表面である無限遠点では場 $A_\gamma(x)$ はゼロという物理的な要請をおくと，結局おつりの項は消える．したがって作用はゲージ不変になる．さて，この作用(4)式からGaussの法則を導くと

$$\mathrm{div}\,\vec{E}+MB=\rho \quad (6)$$

となる．(ここで $E^i=F^{0i}, B=\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}F_{ij}, (i,j=1,2)$ である．) 電場 $\vec{E}$ は2成分を持つ平面上のベクトル量で，一方磁場 B はスカラー量である．奇妙に思うかもしれないが，これが(2+1)次元の特殊性の一つである．さらに奇妙なのは，電荷密度 ρ が磁場 B とも直接関係を持っていることである．逆に言えば，$\mathrm{div}\,\vec{E}=\rho-MB$ だから，磁場 B が電場 $\vec{E}$ の湧き出しの源の一部を担っていると見られる．これが，Chern-Simons項付き(2+1)次元Maxwell理論の特性の一つである．

このように，(2+1)次元時空ではじめて可能になる種々の非常におもしろい特性がある．近年特に，量子ホール効果[4]，高温超伝導[5]といった実際の物理現象との関わりで，また結び目理論等[6]の数学との関わりで，(2+1)次元を巡ってアクティブな研究が進められておりその量は膨大である．ここでは初学者対象ということであり，また紙面の都合もあるので，(2+1)次元の場の量子論の持つ最も基本的と思われる特性のいくつかを紹介していこうと思う．

2．鏡影対称性の量子異常[2)7)]

ここで考えるのは(2+1)次元量子電磁力学(QED$_3$）である．まずは作用を見ていただくと

$$I = \int dtd^2x\left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}+A_\alpha J^\alpha+i\bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi-m\bar{\psi}\psi\right) \quad (7)$$

で与えられる．第1，2項は既に話に出たMaxwell電磁力学の(2+1)次元版を与える部分である．新しく登場した第3，4項は(2+1)次元のフェルミ場 ψ の作用を表す．ここでは $\psi, \bar{\psi}$ を，平面上を動く電子，陽電子（あるいは空孔）だと思えばよい．γ^α は(2+1)次元でのDirac行列で，次のような2×2行列である．

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \gamma^1=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \gamma^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}. \quad (8)$$

フェルミ場 $\psi, \bar{\psi}$ は2成分を持つスピノールと呼ばれる量である．また，J_α はフェルミ場のつくる保存カレントで，$J^\alpha=e\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$ で与えられる（e は素電荷)．m はフェルミ場の質量である．ゲージ変換は(3)式の(2+1)次元版とフェルミ場に対する変換

$$\psi \to e^{ie\theta}\psi,\quad \bar{\psi}\to\bar{\psi}e^{-ie\theta} \quad (9)$$

で与えられ，この理論もゲージ理論である．

では，鏡影対称性とはいったい何だろうか？次のような変換を考えよう．

$$
\begin{aligned}
&\vec{r}=(x,y)\to\vec{r}\,'=(-x,y),\\
&A^0(t,\vec{r}) \quad \to A^0(t,\vec{r}\,'),\\
&A^1(t,\vec{r}) \quad \to -A^1(t,\vec{r}\,'),\\
&A^2(t,\vec{r}) \quad \to A^2(t,\vec{r}\,'),\\
&\psi(t,\vec{r}) \quad \to \gamma^1\psi(t,\vec{r}\,'),\\
&\bar{\psi}(t,\vec{r}) \quad \to \bar{\psi}(t,\vec{r}\,')\gamma^1.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

上式の第1式を見ると x 座標の符号を反転させており，ちょうど鏡に映した世界へこの物理系を変換している．そのため，この変換を鏡影変換と言う．この変換の下で作用(7)式の第1〜3項は不変に保たれ，第4項は符号を変える．もしフェルミ場の質量 m がゼロならば第4項はなくなり，理論は鏡影変換に対し不変に保たれる[8]．これが鏡影対称性である．

では，量子異常[9]とは何だろうか？　この現象は場の量子論枠組の中で初めて現れる(私の大好きな）非常におもしろい現象である．いま，ある1つの場の理論を考える．(7)式のようなある作用を与えるわけである．その作用が幾つかのある対称性を持つとしよう．まだこの段階では量子化ということを考慮に入れていないので，それらを古典的対称性と呼ぼう．次に場の量子化という手続きを経て場の量子論を構成する．このとき古典的対称性は量子論にそのまま受け継がれるだろうか？　と言うより，むしろ対称性が損なわれないように量子論を構成するのが自然である．考えている理論によりいろんなケースが生じる．めでたく全ての対称性を保持した量子論を構成できる場合もある．ところが，それができない場合がある．いま特に，ある2つの対称性に注目しよう．一方の対称性を保とうとすると他方が破れてしまい，両方の対称性を同時に堅持できない事態が生じる場合がある．これが量子異常である．種々の量子異常が発見されているが，最も有名なのが(3+1)次元での軸性対称性の量子異常である．これは π^0 中間子が2個の光子に崩壊するプロセスを見事に説明する．量子異常を巡り，理論的なおもしろさはもとより，実際の物理現象とどう結び付くか，種々の興味深い研究が推進されている．

さて，いまの場合の量子異常であるが，2つの対称性に相当するのが，ゲージ対称性と鏡影対称性である．ゲージ対称性は先にも触れたようにどうしても保持したい．すると鏡影対称性が破れることになる．これが鏡影対称性の量子異常である．では，この量子異常による効果がどんなところに現れるだろうか．場の量子論に従うと，ゲージ場が時空を伝搬する際に，たえず粒子の対生成，対消滅を繰り返し引き起こしている．この（真空偏極の）効果を取り込んだゲージ場の(有効)作用を求めると，何とそこにChern-Simons項が現れる．実はChern-Simons項は鏡影対称性を破る項で，実際変換(10)式の下で符号を変える．すなわち，出発点で鏡影対称性を要請しChern-Simons項を禁じても，真空偏極という量子効果により量子異常が発生し，鏡影対称性を破るChern-Simons項が誘起されるのである．この項が，1節で触れたように，種々のおもしろい特性を理論に与える[10]．

3．位相質量の位相量子化[2]

次に登場するのが(2+1)次元量子色力学(QCD$_3$)である．(3+1)次元で，核子や中間子を構成する基本粒子がクォークと呼ばれ，クォーク間の力を媒介するのがグルーオンであるが，それらを支配する力学が量子色力学である．その(2+1)次元版を考えよう．これからの議論で必要なのは，グルーオンを記述する部分である[11]．次のような作用を考えよう．

$$
\begin{aligned}
I=\int dtd^2x\Big\{&\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})\\
&-\frac{M}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\left(F_{\alpha\beta}A_\gamma-\frac{2}{3}gA_\alpha A_\beta A_\gamma\right)\Big\}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

少し込み入った話になるが，この(11)式を説明しよう．話を具体的にするために，ゲージ群が

$SU(2)$ 群であるとしよう．(もっと一般的に通用するのであるが．) まず，グルーオンを表すゲージ場は

$$A_\alpha = \sum_{a=1}^{3} T^a A_\alpha{}^a$$

と書かれ，T^a $(a = 1, 2, 3)$ はゲージ群 $SU(2)$ の生成子で

$$[T^a, T^b] = \sum_{c=1}^{3} f^{abc} T^c$$

の代数関係を満たす．($[A, B] = AB - BA$ と定義される．) 具体的には行列だと思えば良い．$F_{\alpha\beta}$ は A_α から，

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^{3} T^a F_{\alpha\beta}{}^a$$
$$= \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + g[A_\alpha, A_\beta]$$

と定義される．また，Tr(…) は括弧内の行列の対角成分を足し上げることを意味する．g はグルーオンの相互作用の強さを指定する結合定数である．ちなみに生成子 T^a は規格化条件

$$\mathrm{Tr}\,(T^a T^b) = -\frac{1}{2}\delta^{ab}$$

を満たすものとする．(δ^{ab} はクロネッカーのデルタ．)

さて，(11) 式の第 1 項は (3+1) 次元 QCD の作用 (のグルーオン部分) から，そのまま次元を落として得られる．第 2 項，これが $SU(2)$ 群の場合の Chern-Simons 項で，M が位相質量である．この位相質量にこれから何かおもしろいことが起きるのである．

ゲージ変換を考えよう．これは $SU(2)$ 群の要素を U として

$$A_\alpha \to U^{-1} A_\alpha U + \frac{1}{g} U^{-1} \partial_\alpha U \tag{12}$$

で与えられる．この変換を作用 (11) 式に行うと，

$$I \longrightarrow I + (\Delta I)_1 + (\Delta I)_2 \tag{13 a}$$

となる．ただし

$$(\Delta I)_1 = -\frac{M}{g}\int dt d^2x \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \,\mathrm{Tr}\,(A_\beta \partial_\gamma U U^{-1})$$

$$(\Delta I)_2 = \frac{M}{3g^2}\int dt d^2x \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$$
$$\cdot \mathrm{Tr}\,(\partial_\alpha U U^{-1} \partial_\beta U U^{-1} \partial_\gamma U U^{-1}) \tag{13 b}$$

である．これらのおつりは (11) 式第 2 項の Chern-Simons 項から来る．$(\Delta I)_1$ は被積分関数が全微分の形をしているので (5) 式に対するのと同様の論法でゼロにできるが，$(\Delta I)_2$ の方はそうはいかない．したがって「Chern-Simons 項付きの QCD_3 はゲージ対称性を持たない．」と結論したくなる．「ところが…．」となって話がおもしろくなる．(13) 式が示しているのは，"作用"がゲージ不変でないということである．ここで，一気に開き直って，「いま，量子論を考えているのだから，問題は我々が実際観測する期待値がどうかであって，これがゲージ不変だったらいいじゃないか．」という考え方をしたらどうだろうか．「成程，もっともである．」では期待値はどんなふうに得られるか見てみよう．

量子論を構成するにあたって，Feynmann の経路積分法を使うのが便利である．理屈はともかく，機械的に量子化ができる．(ある場合，問題が生じることがあるが．) これを適用すると，ある物理量 O (ゲージ不変である．) の期待値 $\langle O \rangle$ は作用 I を使って，

$$\langle O \rangle = \int [dA_\mu] O \exp(iI) \tag{14}$$

で与えられる．気軽に書いたが，この (14) 式は実に恐ろしい表式である．$[dA_\mu]$ は各時空点 x に乗っかっている $A_\mu(x)$ で積分することを意味しており，無限に稠密な無限重積分を行っている．その辺の事情 (ゲージ固定とかも) はおいといて，いまは形式的にこの表式を使ってみよう．

期待値 $\langle O \rangle$ に対してゲージ変換を行うと

$$\langle O \rangle \to \int [dA_\mu] O \exp\{iI + i(\Delta I)_1 + i(\Delta I)_2\} \tag{15}$$

となる．($[dA_\mu]$ からおつりはでないと思っておこう．) ここでいよいよ，先の開き直りを実行に移す．(13 b) 式で時空上の積分が行われているが，その積分領域が閉じた空間だとしよう．具体的に，3 次元球面 S^3 をとろう．2 次元球面 S^2 がスイカの表面，S^3 はそれの更に 1 次元上だから絵には書けない．このとき，まず $(\Delta I)_1$ を考えると，これは

被積分関数が全微分の形をしていて表面積分に直せるが，積分領域が閉じた領域なのでゼロになる．次に $(\Delta I)_2$ であるが，ちょっと回りくどいがわざわざ次のように書こう．

$$(\Delta I)_2 = 8\pi^2 \frac{M}{g^2} W(U) \tag{16 a}$$

ここで

$$W(U) = \frac{1}{24\pi^2}\int dt d^2 x \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \cdot \mathrm{Tr}\,(\partial_\alpha U U^{-1} \partial_\beta U U^{-1} \partial_\gamma U U^{-1}) \tag{16 b}$$

と定義する．実はこの $W(U)$ は，Pontryagin 指数と呼ばれる位相幾何学的意味を持つ量で，驚くべきことに整数値のみをとる．U は $SU(2)$ 群の要素で無数にたくさんあるが，それを(16 b)式に代入して計算すると必ずある整数値になるというのである．

$W(U)$ の意味をもう少し詳しく見てみよう．群の要素 U は時空 S^3 上の点 x の関数であり，写像

$U(x): S^3 \to SU(2)$

を定義する．$U(x)$ には無数にたくさんのバラエティーがあるが，それを分類できないものだろうか．そこでこんなふうに考える．x の関数であるこの $U(x)$ をほんのちょっとだけ（無限小）変形する．すると何かもととはちょっとだけ違った関数ができる．またちょっと変形してみる．てなことを続けて行くと，無限小変形の繰り返しでつながる関数の集まりができる．そう考えてくると，逆に無限小変形を続けていっても到達できないような関数もあるだろう．そんな関数もまた別に無限小変形の繰り返しでつながるような仲間を持っている．すなわち，無限小変形の繰り返しでは決して移り合えない関数の集団がたくさんあることになる．この集団を分類するのがいま問題にしているPontryagin 指数 $W(U)$ である．また $W(U)$ は U の無限小変形の下で決まった整数値をとり続ける不変量であるとも言える．これをもって $W(U)$ を位相不変量と言う．

さて話を元に戻すと，結局ゲージ変換のもとで期待値 $\langle O \rangle$ は

$$\langle O \rangle \to \int [dA_\mu] O \exp\left\{ iI + 8i\pi^2 \frac{M}{g^2} \times (\text{整数}) \right\} \tag{17}$$

と変換される．この式をじっと見て，$\langle O \rangle$ がゲージ不変になるようなうまい手がないかと考えてみよう．おつりの項は $\exp\{8i\pi^2 M/g^2 \times (\text{整数})\}$ で exp の肩に乗っている．そこでもし

$8i\pi^2 M/g^2 = 2\pi i \times (\text{整数})$

ならば，おつりの項は

$\exp\{2\pi i \times (\text{整数})\} = 1$

となり(17)式は(14)式に戻る．すなわち期待値 $\langle O \rangle$ は条件

$$M = \frac{g^2}{4\pi} \times (\text{整数}) \tag{18}$$

の下でゲージ不変となる．このとき，M は(18)式の示すように離散的な値をとることになる．これをもって，位相質量の位相量子化と言う．これは「量子論のレベルでのゲージ対称性の要請が物理パラメータに制限を与える．」という非常におもしろい現象である．

4．分数統計粒子[12)]

次に紹介するのが分数統計粒子である．(3+1)次元の世界では，Bose-Einstein 統計(B-E 統計)に従うボース粒子と Fermi-Dirac 統計（F-D 統計）に従うフェルミ粒子の 2 タイプの粒子のみが存在できる．ところが (2+1) 次元では，両統計の間をいわば補間するような途中の統計性を持つ粒子が許されるというのである．

2 粒子の（ここでは場の量子論ではなく）量子力学を考える．その量子状態は 2 粒子波動関数 $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ で指定される．$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ はそれぞれの粒子の座標である．この 2 個の粒子を入れ換えることを考える．入れ換えた後の状態の 2 粒子波動関数 $\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ はもとの入れ換える前の状態と位相が異なり

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{i\theta}\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) \tag{19}$$

と関係付けられる．この位相 θ が統計性を決め

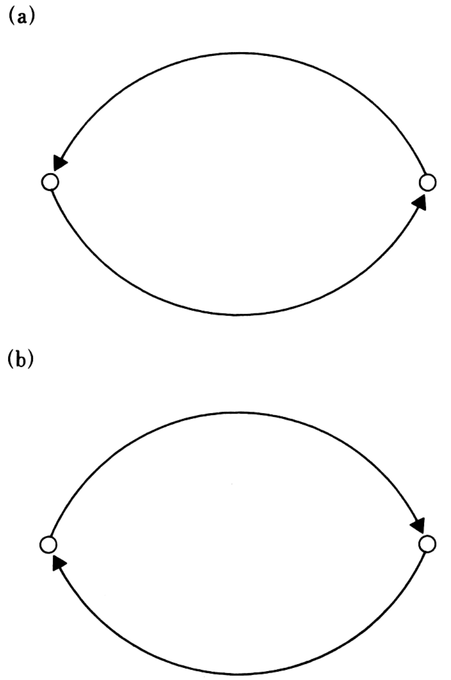


図1　粒子の入れ換え．(a)では $e^{i\theta}$，(b)では $e^{-i\theta}$，2粒子波動関数の位相がずれる．

る．((3)式の θ とは別物．)

まず(3+1)次元を考えよう．いま，ある道筋にそって2粒子を入れ換えたとき $e^{i\theta}$ ずれたとしよう(図1(a))．この操作とは別に，同じ道筋を今度は逆の向きに移動させて入れ換えると $e^{-i\theta}$ ずれる(図1(b))．ところが，3次元空間ではそれら2つの向き付けられた道筋は無限小連続変形を繰り返していって重ね合わせられる(図2)．したがって $e^{i\theta}=e^{-i\theta}$ とおける．すなわち $\theta=\pi\times$(偶数)と $\theta=\pi\times$(奇数)のみが許される．$\theta=\pi\times$(偶数)のとき2粒子波動関数は $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)=\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ と粒子の入れ換えに対して対称になり，このときB-E統計に従うと言う．一方，$\theta=\pi\times$(奇数)のときは $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)=-\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ と反対称になり，このときF-D統計に従うと言う．このように，いわば空間の位相 (topology) が粒子交換にともなう位相(phase)を決め，ひいては許される統計性を決める．

では，(2+1)次元ではどうなるであろうか？今度は平面上で粒子の入れ換えを考えなければならないので，2本の互いに逆に向き付けられた道筋を無限小変形の繰り返しで一致させることができない．したがって，θ にはもはや制限がつかなくなり，一般に任意の実数が許される．ということは，B-E統計，F-D統計以外にその間を補間するような統計性が存在することになる．B-E統計に従う粒子をボソン，F-D統計に従う粒子をフェルミオンと呼ぶが，任意の(any) θ の値を持つ統計に従う粒子をエニオン(anyon)と呼ぶ．これが分数統計粒子である．ここでは一般的な話をしたが，もっと具体的にエニオン(多粒子系)の量子力学[13)14)]を展開することができる．そのとき，またまた驚くべきことに分数統計を発生させるのが例のChern-Simons項なのである．そして，(高温)超伝導の機構を与え得るかどうか多方面から精力的な研究が行われている[15)]．(以上，量子力学の話であるが，現在，分数統計を持つ場の量子論の研究[16)]が推進されている．)

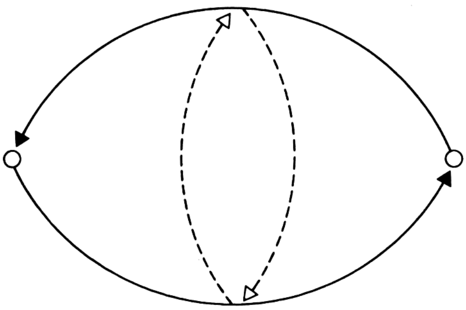


図2　(3+1)次元ではこの紙面と垂直な次元を利用して図1の(a)を(b)に連続変形で移せる．(2+1)次元ではそれができない．

5．終りに

まだまだ紹介したいおもしろい話がたくさんあるが，ついに紙面がつきてしまった．ここでは大部かけ足で鏡影対称性の量子異常，位相質量の位相量子化，分数統計粒子の3つの話題について述べたが，(2+1)次元の場の理論のおもしろさを少

しでも感じてもらえたらと思う．

「(2+1)次元がおもしろい！」理由として最後に特筆しておきたいことがある．それは，関連する研究分野が実に多岐に渡っており，しかもそれらの間の交流が非常に密なことである．素粒子，物性そして数学等々の各分野の重要な問題が深く絡み合っており，いろんな角度からのアプローチがなされ，そしてそれらの融合から新しい概念・手法が生み出されている．今後ともその発展を期待したい．

註と参考文献

1) S. Chern, "Complex Manifolds without Potential Theory", Springer-Verlag (1979).

2) S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Ann. of Phys.* **140** (1982) 372.

3) この名はゲージ場に質量 M を与えることに由来する．通常ゲージ対称性はゲージ場が質量を持つことを禁じるが，Chern-Simons 項はゲージ不変性を保ったまま質量を持つことを可能にする．

4) K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.*, **45** (1980) 494.
D. C. Tsui, H. L. Störmer, and A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1559.

5) G. Bednorz and K. A. Müller, *Z. Phys.*, **B64** (1986) 188.
P. W. Anderson, *Science,* **235** (1987) 1196.

6) E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **121** (1989) 351.

7) A. Niemi and G. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983) 2077.
A. Redlich, *Phys, Rev. Lett.*, **52** (1984) 18.
K. Ishikawa, *Phys. Rev. Lett.*, **53** (1984) 1615.

8) $m=0$ の QED_3 には"赤外発散の問題"があるがここでは目をつむって議論を進める．この問題の非摂動論的扱いについては Y. Hoshino and T. Matsuyama, *Phys. Lett.,* **B222** (1989) 493 及びその reference を参照のこと．

9) 本別冊号の藤原氏の解説を参照のこと．

10) 誘起された Chern-Simons 項の係数は位相不変量と関係付く．このメカニズムが「量子ホール効果への場の理論的アプローチ」において重要となる．詳しくは本別冊号の石川氏の解説を参照のこと．一般化された QED_3 での議論は T. Matsuyama, *Prog. Theor. Phys.*, **77** (1987) 711 を参照のこと．

11) フェルミ場は QCD_3 においても§2 と同様に鏡影対称性の量子異常を起こす．

12) J.M. Leinaas and J. Myrheim, *Nuovo Cimento,* **B37** (1977) 1.
F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982) 1144 及び **49** (1982) 957.

13) R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.*, **50** (1983) 1395.
B. I. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 1583 (**52** (1984) 2390 (E)).
Y.-S. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984) 2103及び**53** (1984) 111.
D. Arovas, J. R. Schrieffer, and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 722.
D. Arovas, J. R. Schrieffer, F. Wilczek, and A. Zee, *Nucl. Phys.*, **B251** 〔FS13〕 (1985) 117.

14) T. Matsuyama, *Phys. Lett.*, **A144** (1990) 59 及び *J. Phys.*, **A23** (1990) 5241.

15) その方面の文献の数は膨大である．重要なものとしては A. M. Polyakov, *Mod. Phys. Lett.*, **A3** (1988) 325.
X.-G. Wen, F. Wilczek, and A. Zee, *Phys. Rev.*, **B39** (1989) 11413.
Y.-H. Chen, F. Wilczek, E. Witten, and B. I. Halperin, *Int. J. Mod. Phys.*, **B3** (1989) 1001.
また，青木秀夫，科学，**61** 1991 年 6 月号の解説及びその参考文献を参照のこと．

16) G. W. Semenoff, *Phys.Rev. Lett.*, **61** (1988) 517.
T. Matsuyama, *Phys. Lett.*, **B228** (1989) 99, *Prog. Theor. Phys.*, **84** (1990) 1220 及び *Phys. Rev.*, **D42** (1990) 3469.

(まつやま・とよき，奈良教育大学・基礎物理学)

III. 物性物理と場

量子ホール効果とトポロジカル不変量

石川　健三

1. はじめに

一つの空間より他の空間への写像より定義されるトポロジカル不変量は，その写像の大局的性質を示し，写像の無限小の変化に対して不変であり，また特別に量子化した値をとる．

因果律の存在を考慮すると物理量は時間・空間の局所的関数からなっていると考えられる．そのため，局所的な性質を考察することが多い物理学では解析的方法がとられることが多く，トポロジー的方法はあまり使われてこなかった．局所的な量は定量的な変化も大きく，定量的な議論に適しており定量的結果を好む自然科学の観点からも解析的方法に大きく依存してきたわけである．

自由度の数が無限大である場の量子論では本質的な方程式が無限次となり，解くのは非常に難しい．多くの場合近似に基づいて議論が展開される．場の量子論が関与する物理現象は，一方で，大変豊富な内容を持ち超伝導・超流動，…等その発見以前は想像が難しかった多くの新現象が含まれるとともに，クォークの閉じ込め等の素粒子物理の基本的諸問題が含まれている．自由度の数が無限大であることより生じている豊富な現象をむしろ逆に，比較的簡単な構造をなすトポロジーの観点より解析することより，自然現象に対して新しい認識が得られないだろうか？　トポロジカル不変量が直接観測にかかるのであれば，その特殊な性質が直接見えることにもなり，非常に面白いだろう．

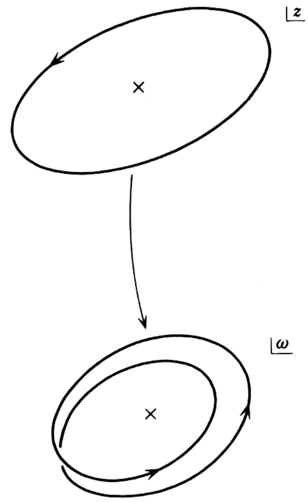


図1

トポロジカル不変量の簡単な例としては，複素関数 $f(z)$ より定義される閉径路にそった複素積分（図1）

$$n=\frac{1}{2\pi i}\oint dzf'(z)\frac{1}{f(z)} \qquad (1)$$

がある．複素数 z を一つ決めると $f(z)$ が一つ決まるとする．新しい変数 $w=f(z)$ を使い(1)式を書き直すと n が $\frac{1}{2\pi i}\oint d\omega/\omega$ と表されることより，ω が原点のまわりを回る回数が n であることになる．n は零点の数から極の数を差し引いた整数で

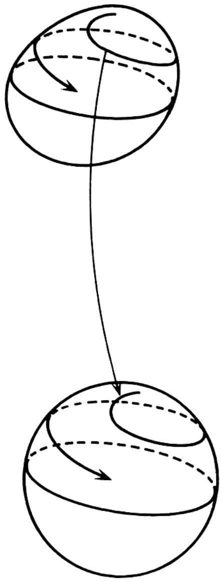


図 2

ある. 関数 $f(z)$ を少し変形しても径路内の零点の数——極の数が——一定ならばこの数は不変に保たれる安定性を持つ.

以上の写像のトポロジカル不変量を複素数から高次元の境界のない空間に拡張するのは容易である. 例えば 3 次元以上の球面上の点より球面上の点への写像 (図 2) に対しても同様な巻き数が定義され, その値はある値を単位として整数倍となる. これらの巻き数は球面上の各点における写像の局所的性質ではなく, その大局的性質を反映している. だからこそその値が写像の微小変形に対して不変であるという安定性を持つとともに, 特殊な値に量子化された値をとる.

2. 場の理論におけるトポロジカル不変量

前節で考えた低次元空間での写像の巻き数が自由度の数が無限大である場の量子論において意味を持つことがある. 場の量子論が定義されている無限個の要素を持つ空間内に低次元空間が埋めこまれているとすると, その部分空間でのトポロジカル不変量が空間全体の場の量子論におけるトポロジカル不変量になりうる. その場合には, そのトポロジカル不変量はより重要な意味を持つことになる. そのような不変量として以前から議論されていた 1 点グリーン関数に関するトポロジカル不変量と, 最近わかってきた 2 点グリーン関数に関するトポロジカル不変量について以下説明する. 後者はさらに, 量子ホール効果で直接物理量と結びつくものである.

場の理論は状態ベクトルとそれらの間の行列要素で記述される. これらは一方, 演算子の真空期待値 (グリーン関数) のすべてのもので規定される. スカラー場 $\varphi_i(x)$ の真空期待値 $\langle 0 \mid \varphi_i(x)|0\rangle = f_i(x)$ は真空そのもの, $|0\rangle$, の性質を規定することになり, 異なる真空期待値は異なる真空に対応すると考えられる. この関数 $f_i(x)$ は x から f_i への写像とみられるので, 写像 $f_i(x)$ に伴うトポロジカル不変量が存在すると考えられる[1]. このトポロジカル不変量は真空を区別することに使われ, ソリトン, モノポール, インスタントン等のある種の場の方程式の古典解を分類するのに有効である[2]. ちなみに 1+1 次元スカラー場の理論

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \qquad (2)$$

における定常解

$$\varphi(x) = \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}},\ \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\tanh\frac{\mu}{2}(x-x_0) \qquad (3)$$

はトポロジカルな不変量,

$$\theta = \int dx\partial_x\varphi = \varphi(+\infty) - \varphi(-\infty),$$

で区別される. 同様なトポロジカル不変量で区別される古典解を持つ理論として, 2+1 次元 Higgs 理論, 3+1 次元 $SO(3)$ Higgs 理論, 3+1 次元非可換ゲージ理論等の理論がある. これらのいくつかの理論では, エネルギーを有限にするためにスカラー場の真空期待値が零と異なる有限な値をとり, ラグランジアンの持つ対称性が自発的に破れている. 対称性の破れが空間内に非一様におきたときの真空の様子がこれらのトポロジカルな不変量で区別できるわけである. 場の量子論の空間は,

真空とその上にある励起状態の集まりよりなる空間でできているが，その真空の性質をトポロジカル不変量で分類していることになる．対称性の自発的破れに伴う上述の古典解とは異なるインスタントン解がゲージ理論には存在する．$SU(2)$ 群のとき4次元ユークリッド時空で，$r=\sqrt{x_0^2+\vec{x}^2}\to\infty$ の領域で作用が有限になるために，$SU(2)$ のゲージ場は $SU(2)$ 群のマトリックス $g(x)$ より，

$$A\mu(x)=ig(x)^{-1}\partial_\mu g(x) \qquad x\in S^3 \qquad (4)$$

となる必要がある．この $g(x)$ を使いポントリャーギン数は

$$q=\frac{1}{24\pi^2}\varepsilon^{ijk}\int_{S_3}d^3x \times \mathrm{Tr}\left[g^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}g\, g^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}g\, g^{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}g\right] \qquad (5)$$

と書ける．q は $\vec{x}$ から g への写像の巻き数を表している．大きさは整数である．

次に2点関数から作られるトポロジカル不変量を定義しその意味を考える[3]．2点関数は1点関数とは異なり場の理論の動的性質を反映した量である．2点関数の振る舞いより，波動（粒子）の伝播の様子が決まることより，波動の伝播に付随するトポロジカル不変量が定義される．この不変量は系の動的性質を示している．そのため，前述の1点関数から作られる不変量より，より豊富な内容を持っている．

2点関数 $\langle T(\varphi_i(x)\varphi_j(y))\rangle=S_{ij}(x-y)$ を Fourier 変換して運動量 p の関数として S_{ij} を考える．この写像のトポロジカル不変量である巻き数は，

$$N=\frac{1}{24\pi^2}\int dp\varepsilon^{ijk}\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial S^{-1}}{\partial p_i}S\frac{\partial S^{-1}}{\partial p_j}S\frac{\partial S^{-1}}{\partial p_k}S\right] \qquad (6)$$

で計算される．式(5)が空間座標 x より場の変数 $g(x)$ への写像のトポロジカル不変量であったのに対して，式(6)の表示は同じ形をしているもののその内容は運動量 p に関する積分であることより相当異なっている．演算子 $\varphi_i(x)$ で表現される波動（粒子）の伝播の大局的性質を示すこの不変量は，波動が有限質量のものであるとき，系の変形に対して安定である．系の変形の一つとして，相互作用を加えてもその安定性は一般に保たれる．すなわち，不変量は系の相互作用に無関係な値を持つことになり，自由度の数が無限大の系において，近似とは無関係な関係式が得られたことになる．

3．量子ホール効果

系の変形に対して安定であるトポロジカル不変量が測定可能であることになれば，科学・技術の幅広い分野とも関連しうることになる．(6)式で表される2点関数より定義されるトポロジカル不変量である巻き数 N は，磁場中での電子場のものであるとき，電気伝導の測定より決定されるホール伝導度に比例する．トポロジカル不変量による考察は，極低温・強磁場下での Si MOSFET および GaAs-GaAlAs ヘテロ構造等の半導体現象で観測されている量子ホール効果[4]の本質的な理解にも役立つ．

自由度の数が無限大の場の理論において，いくつかの厳密に成立する関係式がある．代表的なものが電流に対する連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0 \qquad (7)$$

である．電荷は必ず保存し，座標 $\vec{x}$ での電荷密度 $\rho(t,\vec{x})$ の時間変化はその点に流れ込む電流の和であるという意味を持つこの式が成立することはほとんど自明である．しかしながら，場の量子論では $\rho(t,\vec{x})$, $\vec{j}(t,\vec{x})$ ともに場の演算子から作られるものであり，その役割は単純ではない．もう一つの代表的な関係式は交換関係である．これは量子論に固有のものであり，力学変数とその共役量との間の交換関係が基本であり，それから様々な交換関係が導びかれる．電荷密度 $\rho(t,\vec{x})$ と場の演算子 $\varphi_i(t,\vec{y})$ とは簡単な交換関係，

$$\begin{aligned}&[\rho(t,\vec{x}),\ \varphi_i(t',\vec{y})]\delta(t-t')\\ &=\delta(\vec{x}-\vec{y})\delta(t-t')\varphi_i(\vec{y})\\ &\quad+O(\partial_i)\delta(\vec{x}-\vec{y})\delta(t-t')+\cdots\end{aligned} \qquad (8)$$

を満たしている．連続の式(7)と交換関係(8)とを併用すると，電流密度演算子を含むグリーン関数の間にもやはり厳密に成立する関係式があることがわかる．Ward-高橋恒等式として知られているこの関係式は場の理論のくりこみ可能性の証明等において重要な働きをしてきた．2点関数より定義されるトポロジカル不変量[5]もこのWard-高橋恒等式と密接に関係している．強磁場下でのWard-高橋恒等式[5]は系に外場が加わっているので，外場がないときの通常のものとは異なるので少し注意が必要である．強磁場下での場の理論を見通し良く展開するために，空間的に局在している強磁場下での完全系をなす基底を用意すると便利である．電子場をこの完全系で展開したその係数を新しい場の演算子とみなす．この場は時空座標以外に，ランダウレベルの指標を持つため，2点関数はランダウレベルの足を持つ行列となる．3次元運動量より2点関数の行列への写像の巻き数がトポロジカル不変量であり，実験的に観測されているホール伝導度に比例する．電気伝導度は系に流れている電流と電圧との比例係数であり，2次元面上ではそれぞれが2方向の成分を持つため，両者の関係式は，

$$\begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \quad (9)$$

となり伝導度は2行2列の行列となる．しかしながら一般に空間の対称性より $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}$, $\sigma_{xy}=-\sigma_{yx}$ であり独立量は対角成分と非対角成分との2つに限られる．対角成分は電圧に平行な電流に対する比例係数でありオームの法則に対応するエネルギー散逸の大きさを表すが，非対角成分は両者が直交する場合の比例係数でありエネルギー散逸とは無縁である．特に $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=0$ かつ $\sigma_{xy}\neq 0$ のときはエネルギー散逸が全くなく，定常的に電流が流れている状況である．そのため，場の理論における S 行列を計算する際の $t\to\pm\infty$ での自由境界条件のもとでの計算がそのまま使える．

ホール伝導度は場の理論より電流演算子の相関関数 $\pi_{\mu\nu}(q)$ の $q=0$ での傾きから，

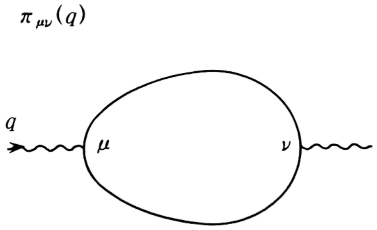


図3

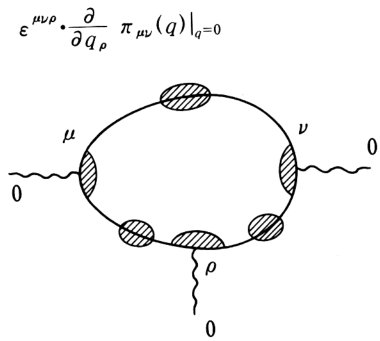


図4

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{3!}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\frac{\partial}{\partial q_\rho}\pi_{\mu\nu}(q)|_{q=0}$$

$$i(2\pi)^3\delta(q_1+q_2)\pi_{\mu\nu}(q_1)$$

$$=\int dxdye^{iq_1x+iq_2y}\langle 0|T(j_\mu(x)j_\nu(y)\,|\,0\rangle \quad (10)$$

と表される．$\pi_{\mu\nu}(q)$ のファインマン図は，図3で与えられ，さらにその微分 $\frac{\partial}{\partial q_\rho}\pi_{\mu\nu}(q)|_{q=0}$ は図4で表される．この際Ward-高橋恒等式を使った．図から明らかなように，プロパゲータを使う σ_{xy} に対する表示

$$\sigma_{xy}=\frac{e^2}{2\pi}N_w$$

$$N_w=$$

$$\frac{1}{24\pi^2}\int d^3p\varepsilon^{\mu\nu\rho}\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial S^{-1}}{\partial p_\mu}S\frac{\partial S^{-1}}{\partial p_\nu}S\frac{\partial S^{-1}}{\partial p_\rho}S\right] \quad (11)$$

が得られる[5),6)]．N_w は式(6)に一致する2点関数から定義されるトポロジカル不変量である．N_w は積分路の上にSingularityがなく，かつ一価性を持つ等の適当な条件を満たすとき整数に一致す

る．その具体的大きさを求めるに当たって σ_{xy} が満たすもう一つの性質，すなわち「赤外発散がないとき σ_{xy} は摂動論の１ループの計算でつき高次補正はない[7]」ことを使う．その結果 N_w はフェルミエネルギーとともに $e^2/2\pi$ の整数倍となる一定の値をとる領域と，一様に増加する領域とからなる関数であることがわかる．いくつかの条件が満たされるとき σ_{xy} は $e^2/2\pi$ の整数倍となるのであるが，この条件はいかなるとき満たされるのであろうか？　σ_{xy} が電子密度とともに一定の値をとるのはいかなるときであろうか？　これらはトポロジカル不変量が系のパラメータとともに変化せず不変に保たれるための条件を明らかにすることに他ならない．

ところで現実の半導体中には多くの不純物が存在する．乱雑に分布している不純物があるときの一粒子状態は波動関数が空間的に局在しているとともに，エネルギー固有値が不連続になっている局在領域と波動関数が空間的に拡がりかつエネルギー固有値が連続になっている非局在領域とに分離することが計算機実験や他の様々な計算から示されている．局在領域では，波動関数が空間的に有限な拡がりを持ちかつエネルギー固有値は不連続になっているため，赤外発散は存在しないことになり，σ_{xy} の安定性が保証される．この領域では，σ_{xy} は $e^2/2\pi$ の整数倍となる．整数の値は摂動論の最低次からのもので求められる．具体的な計算によってその大きさは，つまっているランダウレベルの数に比例することがわかるとともに，運動量空間からランダウレベルの行列空間への写像の巻き数が，各部分空間での巻き数の和になっていることがわかる．各部分空間での巻き数は，時空３次元ディラック場の理論で軸性アノマリーと同じ起源を持つ異常電流の大きさかまたはその２倍である．場の理論で重要な働らきをしていた軸性アノマリーが実は量子ホール効果でも重要な働らきをしていることは興味深い[8]．

σ_{xy} はトポロジカル不変量であるため系の微小変形に対して不変である．系の変形として，相互作用の付加，不純物の付加，系を有限の大きさにすること等が考えられる．これらのもとでも，連続の式と交換関係とは成立し，いくつかの条件を満たす限り σ_{xy} はやはり安定に保たれる[5]．

では σ_{xy} が厳密に $e^2/2\pi N$（N は整数）に一致したとしていかなる応用が考えられるのであろうか[9]？　その一つは量子ホール効果が抵抗標準として使えることであり，その二つめは量子電気力学（QED）の基本的パラメータである微細構造定数が決定されることであろう．前者は電気抵抗の物理的ものさしを与えるというテクノロジーにとって重要な意義を持つ．物理の原理に基づいているものさしは万国共通であり普遍的な働らきをするので，地味ではあるが重要である．後者は，QED の微細構造定数 $e^2/4\pi$（$c=\hbar=1$）という素粒子物理等の基礎物理にとって重要である．場の量子論のくりこみ理論の正当性は QED の高次計算の結果がいままでのところ実験と非常に良く一致することにより確かめられている．しかしながら，より高次の項までとり入れ詳細な検討をしたときどうなるかは未知の問題である．一方，電子がより基本的な粒子から成り立っている可能性も否定できないわけである．以上の理由で，より高次の項までとり入れて QED の理論と実験との比較がなされるべきであるが，その際微細構造定数が精度よく決まっていることが不可欠である．そのために，量子ホール効果が使えるわけである．

以上ホール伝導度 σ_{xy} が $e^2/2\pi$ の整数倍となる現象，整数量子ホール効果，をみてきたがそれ以外に σ_{xy} が $e^2/2\pi$ の有理数倍になる現象，分数量子ホール効果[10] が実験的に観測されている．複素関数 $f(z)$ が $z^{q/p}$ のような関数であり，複数のリーマン面から成り立っているときに値 $n(1)$ は有理数となる．高次元空間の場合でも同様な多面関数に対するとき巻き数は有理数になる．このとき，この値が安定に保たれるためには，フェルミエネルギーでの一粒子状態にギャップが生ずることが必要である．相互作用がないときにはこのギャップは明らかに存在しないので，これは超伝導と同様な相互作用によるギャップの生成の問題である．この機構の理解は現在進行中でありその中

で大きな注目を集めているのは，Laughlin[11]による変分関数である．最低ランダウレベルにある電子の座標より作った複素数 $z_i=x_i+iy_i$ を使い N 粒子系の波動関数を

$$\Psi=(z_1, z_2, \cdots, z_N)=\prod_{i<j}(z_i-z_j)^p e^{-\frac{1}{2R_0{}^2}\sum|z_i|^2} \tag{12}$$

と書く．フェルミ統計の要請より p は奇数であり，電子の密度と関連する指数である．励起状態は，分数電荷を持ち分数統計に従う等の面白い性質を持っていてかつ，エネルギーギャップは有限である．

4. チャーン・サイモンゲージ理論

電流演算子の2点関数の原点での傾きがホール伝導度であり，荷電場の2点関数から定義されるトポロジカル不変量であった．電流演算子はラグランジアンの中でゲージ場のベクトルポテンシャルと結合していたので，ベクトルポテンシャル A_μ の系にこのトポロジカル不変量が零でないことの効果が現れる．この結果，A_μ に対する有効作用が，

$$\frac{\sigma_{xy}}{2}\int d^3x\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho \tag{13}$$

なるチャーン・サイモン項を持つことになる．チャーン・サイモン項だけを持つゲージ理論の運動方程式は

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho=0 \tag{14}$$

となり，伝播する波動の自由度は存在しないことになる．よって，この理論は場の理論でありながら場の理論に固有の無限大の自由度を持たず，有限個だけの自由度を持つ．これが，トポロジカルな現象の表現をする．例えば，くみ紐理論とか，ブレイド群とかがこのチャーン・サイモンゲージ理論と密接な関連を持っている．

チャーン・サイモンゲージ場が物質場と結合すると物質からの電荷密度 ρ とチャーン・サイモンの磁場とが，

$$gB+\rho=0 \tag{15}$$

なる関係式を満たすようになる．よって粒子数が一定である系は同時に磁場を伴うことになり，磁場中での系の性質を示すようになる．磁場中での一粒子状態，ランダウレベル，は適当な電子密度でギャップを持つので，ある条件のもとでは超伝導の性質さえ示す．

5. おわりに

自由度の数が無限大である場の理論において，有限次元のトポロジカル不変量が重要な，かつ面白い役割を担うことをみてきた．量子ホール効果では，まさにトポロジカル不変量が観測量となっており，ホール伝導度が特別に量子化された値に一致する．この測定を通して抵抗の標準が定められ，またQEDの微細構造定数が精密に決定される．

ホール伝導度が一般の場の理論ではなく特殊な量子力学系においてトポロジカル不変量であるという指摘はThouless[12]らによって特別な系でなされその方向での発展がなされていた[13]．しかしながら量子ホール効果の実験に対応する，自由度の数が無限であり，かつ特別に条件を課さない相互作用している任意な系でも量子ホール伝導度がトポロジカル不変量であるというためには，本稿で述べた通り電流保存則と交換関係より得られるWard-高橋恒等式が不可欠であろう．

追記（1998年12月）

当論文が『数理科学』1991年11月号に掲載されて後，著者達の仕事に新しい発展があったので追加しておく．トポロジー的不変量の特徴は，本論文で説明されている通り物理系の変形に対して安定であることである．これが，

（1） 周期ポテンシャルを持つ量子ホール系や，有限の大きさや有限の電流を持つ量子ホール

系等の実現的な系，並びに分数量子ホール効果に拡張された[14]．

（2） 空間反転や時間反転を破る凝縮系（超伝導，超電流）でも同様な物理量があり面白い物理と関連していることが新しくわかった[15]．

参考文献

1) J. Arafune, P. G. O. Freund and C. J. Goebel, *J. Math. Phys.* **16** (1975) 433.
2) T. Eguchi *et al.*, *Phys. Reports*, **66**, 213 (1980).
3) K. Ishikawa, in "Proceedings of the 3rd International Symposium on Foundations of Quantum Mechanics", S. Kobayashi *et al.* eds. The Physical Society of Japan (1990) p. 70.
4) K. Von Klitzing *et al.*, *Phy. Rev. Lett.*, **45**, 494 (1980); S. Kawaji and J. Wakabayashi, in "Physics in High Magnetic Fields", S. Chikazumi and N. Miura eds., Springer-Verlag (1981) p. 284.
5) K. Ishikawa and T. Matsuyama, *Zeit. Phys.*, **C33**, 41 (1986); *Nucl. Phys.* **B280**, 523 (1987); N. Imai *et al.*, *Phy. Rev.* **B42**, 10610 (1990).
6) H. So, *Prog, Theo. Phys.*, **D4**, 585 (1985).
7) S. Coleman and B. Hill, *Phys. Lett.*, **B159**, 184 (1985); O. Abe and K. Ishikawa, in "Rationale of Being", festschrift in honor of Prof. G. Takeda's sixtieth Birthday, K. Ishikawa *et al.* eds., World Scientific Pub., Singapore (1986) p. 137.
8) K. Ishikawa, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 1615; *Phys. Rev*. **D31**, (1985) 1432; R. Jackiw, *Phys. Rev*. **D29** (1984) 2375.
9) 例えば，吉広和夫，電子技術総合研究所彙報 **55**，67 (1991).
10) D. C. Tsui, H. L. Störmer, and A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1559.
11) R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett*, **50** (1983) 1395.
12) D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale and M. dem Nijs, *Phys. Rev. Lett,* **49** (1982) 405.
13) 例えば，"The Quantum Hall Effect", R. E. Prange and Steven M. Girvin, edis, Springer-Verlag, (1987) 参照.
14) 量子ホール系
有限サイズ系
K. Ishikawa, N. Maeda and K. Tadaki, *Phys. Rev.* **B54**, 17819-17837 (1996).
K. Ishikawa, N. Maeda, K. Tadaki, and S. Ucchiyama, *Phys. Lett.* **A210**, 321-327 (1996).
有限電流系
K. Ishikawa, N. Maeda, T. Ochiai, and H. Suzuki, *Phys. Rev.* **B58**, R13391-R13394 (1998).
分数量子ホール効果
K. Ishikawa, N. Maeda, *Prog. Theor. Phys.* **97**, 507-525 (1997).
周期ポテンシャル系
K. Ishikawa, N. Maeda, T. Ochiai, and H. Suzuki, *Phys. Rev.* **B58**, 1088 (1998).
K. Ishikawa, N. Maeda, T. Ochiai, and H. Suzuki, in print *Physica **E***, (1999).
15) 空間反転や時間反転を破る凝縮系
J. Goryo and K. Ishikawa, *Phys. Lett.* **A246**, 549-559 (1998).
J. Goryo and K. Ishikawa, *Jour. Phys. Soc. Japan* **67**, No. 9, 3006-3009 (1998).
"On induced Chern-Simons terms In P-, T-violating superconductors", J. Goryo and K. Ishikawa, in preparation.

（いしかわ・けんぞう，北海道大学大学院理学研究科）

III．物性物理と場

ベリーの位相

青木 秀夫

1．序

イギリスは時々新しい概念の苗床となる．量子力学的波動関数が，ハミルトニアンに含まれるパラメータをパラメータ空間内の経路に沿って断熱的に変化させたときに，経路に依存する位相因子を獲得する，という現象も，ブリストルのマイケル・ベリー（Berry）が1983年に言い出したものである[1]．これは力学的なものではなく，微分幾何学(パラメータ空間を底とするベクトル束の構造)のみによるので，幾何学的位相とも呼ばれる．経路に沿ってベクトルを一周させたときに元に戻らない現象では，曲面上のベクトルの「平行移動」がすぐに思い出される（図1）．一口でいえば，ヒルベルト空間のベクトル（波動関数）の構造が，パラメータ空間上で「曲率」を持つときに，これに似た現象が起きる．これは波動関数の位相に関係する．系を記述するハミルトニアンにパラメータλ(例えば，分子内の電子に対しては原子核の位置）が含まれているとしよう．量子力学の教科書の「断熱定理」によれば，系が初期にとっている状態からλの変化に従って別の状態に遷移する確率はλの時間微分の行列要素（の自乗）に比例し，したがってλを無限にゆっくり（断熱）変化させるときには，状態は初期のままに留まる．しかし，これは波動関数Ψの位相がλにつれて変化する可能性については何もいっておらず，実際ベリーが示したのは，λ(一般には複数のパラメータのセット）をパラメータ空間のある経路Cに沿って断熱変化させたときには，Ψには

$$e^{i\gamma},\quad \gamma=-\int_0^t\langle\Psi|\frac{d|\Psi\rangle}{dt}dt \qquad (1)$$

だけの位相変化が生じる．特に，閉じたループに沿って一周断熱変化させたとき，波動関数は一般には元に戻らず，

$$\gamma_c=i\oint_c\langle\Psi|\frac{d}{d\lambda}|\Psi\rangle d\lambda\equiv i\oint_c A d\lambda$$

だけの余分の位相を得る．

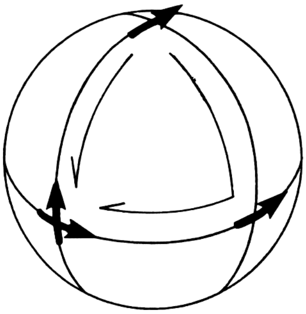


図1　曲面上でのベクトルの平行移動．

2．ベリーの位相

（1)式を導くのは容易である．ポイントは，シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t)=H(t)\Psi(t)$$

において，ハミルトニアンHが時間に依存しない

ときは，定常解の時間依存性は $\exp[-i(E/\hbar)t]$ となる．H にパラメータが含まれており，これらが時間的に変化するときも，(各時点で規格化された) 波動関数 $\Psi(t)$ には，各瞬間の H の期待値を用いて

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \langle \Psi(t)|H|\Psi(t)\rangle dt\right]$$

という時間依存性が生じる．これを力学的位相 ϕ_d と呼ぼう．

$$\Psi(t)=e^{i(\phi_d+\gamma)}\psi$$

とおいて，力学的位相以外の位相 γ を分けると，シュレディンガー方程式から $\dot{\gamma}=i\langle\psi|d/dt|\psi\rangle$ となり(1)が求まる．特に，ベリーが元々考えたように，初期に Ψ が H の固有関数の一つ ψ_n であったときには，固有関数展開をして，摂動論から，H の時間変化が充分遅い条件下で，

$$\psi_n(t)=\exp\left[-\int\langle\psi_n|\dot{\psi}_n\rangle dt\right]\psi_n(0)$$

を示すことができる．

波動関数にゲージ変換をして，$\psi(\lambda)\to\psi(\lambda)\times\exp(i\alpha(\lambda))$ のようにさらに余計な位相を付けると，$A\equiv\langle\psi|d/d\lambda|\psi\rangle$ は $d\alpha/d\lambda$ だけ変化するが，パラメータ空間内で閉じた一周積分 γ_c はゲージ不変である．よって，「ストークス定理」によりベリーの位相を

$$\gamma_c=\int_S FdS$$

のような面積分に表すこともできる[2]．ここで FdS は，$Ad\lambda$ を 1 次微分形式と思ったときの 2 次微分形式 (rot) であり，F は仮想的なゲージ場である．倉辻は，経路積分を用いて，これを作用関数でも表せることを示している[1]．

数学的には，経路を一周の後に状態が元に戻らない例は，様々な所に顔を出し，ベリーは以下のような例を挙げている[1]．先ず古典力学で，膜(太鼓)の振動において太鼓の形を連続変形したとき，その変形の経路が縮退モードを持つような対称的な形に対応する点を囲むときには，変形後もとの形に戻したときに，振動の位相(凹凸)が反転する．より抽象的な例は，曲面の主曲率の方向で，これはヘス行列という 2 次元行列の固有ベクトルで与

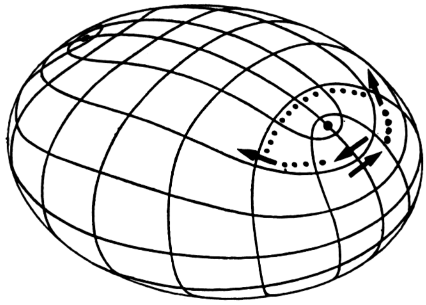


図 2 楕円面上での臍点（曲率主方向網の特異点）と，その回りでの主方向ベクトルの平行移動．

えられる[3]．この固有値が縮退する点(局所的に球面と同じとなる点)を臍点といい[4]，ここでは主方向は不定となる．臍点を囲む経路でベクトルを平行移動させると，一周の後方向が変わる (図 2)．

3.「曲率」——量子ホール効果の例

ベリーの位相に対して 1983 年にサイモン[2]が与えた解釈は，波動関数（ベクトル束）が，シュレディンガー方程式を満たしながらパラメータの変化に追従（パラメータ空間内で「平行移動」）するとき，経路上の波動関数のセットは一定の仕方により接続され，これは経路に依存する．ベリーの位相はこの接続の微分幾何学の帰結，すなわち，ベリーの位相がゼロでないとはこの接続が「曲率」を持つことに対応する．これはゲージ場の理論を思い出させ，これ故に，ベリーの位相を，ある実効的な「ゲージ場」が存在する，という風に表現することもできる．これは，波動関数が常にシュレディンガー方程式の解である，という「拘束条件」を課したための効果といえる．ウィルチェックとジーは系の対称性によっては非アーベリアン・ゲージ構造が出て来る例を示している[5]．さらに，ホルデインは，最近興味が持たれている空間 2 次元系でのエニオン（分数統計粒子)[6]を一般化して，任意次元での分数統計を論じているが，そこでは統計性はヒルベルト空間の次元を反映し，ヒルベルト空間の次元は粒子置換に対するベリーの位相と密接に関連している[7]．

具体的に，2次元空間内の電子に，垂直磁場をかけた量子ホール系の例を見てみよう[8]．現実の系では長方形の試料に電極端子をつけて，伝導度を測定するが，端の影響を避けるために思考実験として，周期的境界条件を採ろう．すると系は円柱となり，それに貫かせたソレノイドの磁束 Φ を時間変化させれば，電磁誘導により起電力が生じ，ホール電流を誘起できる．円柱の端もなくしたいので，いっそトーラスにしよう．このときは，図3のように2本の磁束 Φ_x, Φ_y が要る．これは電流をポロイダル方向でもトロイダル方向でもない一般の方向に誘起させようとすればすぐ了解される．ハミルトニアンは

$$H=\frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ext}}+\boldsymbol{A})\right]^2+V$$

となる．$\boldsymbol{A}_{\mathrm{ext}}$ は磁場 $\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ext}})$ を与えるベクトル・ポテンシャル，$\boldsymbol{A}=(A_x, A_y)$ は (Φ_x, Φ_y) によるベクトル・ポテンシャル，V はそれ以外のポテンシャルである．

(A_x, A_y) を断熱的に変化させると，波動関数は位相を得るが，これは曲率を持つ．つまり，先ず $(A_x+\delta A_x, A_y)$ としてから $(A_x+\delta A_x, A_y+\delta A_y)$ としたときと，先ず $(A_x, A_y+\delta A_y)$ としてから $(A_x+\delta A_x, A_y+\delta A_y)$ としたときとでは位相は異なる．摂動論から，内積 $\langle\Psi(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})|\Psi(\boldsymbol{A})\rangle$ に対するこの差は

$$\delta A_x \delta A_y \times \sum_{\beta\neq\alpha}\left[\frac{\langle\beta|\partial H/\partial A_x|\alpha\rangle}{\hbar(E_\alpha-E_\beta)}\frac{\langle\alpha|\partial H/\partial A_y|\beta\rangle}{\hbar(E_\beta-E_\alpha)}-(x\leftrightarrow y)\right]$$

となる．然るに $\partial H/\partial\boldsymbol{A}\propto(\boldsymbol{p}-(e/c)\boldsymbol{A})$ は丁度電流演算子 $\boldsymbol{j}$ に比例し，上の式は $j_x j_y$ の相関関数となり，久保公式からこれはホール伝導度（の反対称部分）σ_{xy} に他ならない．サウレス，甲元等[9]により指摘されたように，この量の全ての (A_x, A_y) にわたる平均 $\langle\sigma_{xy}\rangle$ はトポロジカル不変量（第一チャーン指数）であり，曲率の全曲面にわたる積分が整数（ガウス・ボネ定理）と同様に整数であり，これから，ある条件下での量子ホール効果を説明することができる．

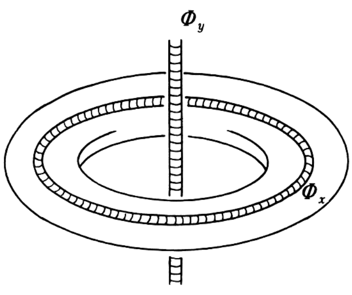


図3 トーラス面を貫く2本の磁束．

V として不規則ポテンシャルを導入したときも $\langle\sigma_{xy}\rangle$ は整数となり（図4）[10]，これが各状態に対してゼロか否かは，波動関数のゼロ点が (A_x, A_y) を走査したときどのように動くかということと関連する（図5）[11]．

4．2準位系

波動関数を360度回転させたときに元に戻らない別の現象は，すぐにスピノール（スピン1/2粒子の波動関数）が思い出される．スピン量子化軸を z として，スピンの z 成分を σ とすると，スピン波動関数 $\psi(\sigma)$ は，軸回りに 2π 回転すると，$\psi(\sigma)\to\psi(\sigma)e^{i\sigma\phi}$ と変換され，σ が半奇数（例えば1/2）のときは符号を変える．数学的にはスピノールは一般に2状態系の波動関数と同型である．

実は，複数軌道系（分子の量子力学の言葉でいうとヤーン・テラー系）の波動関数 Ψ が，パラメ

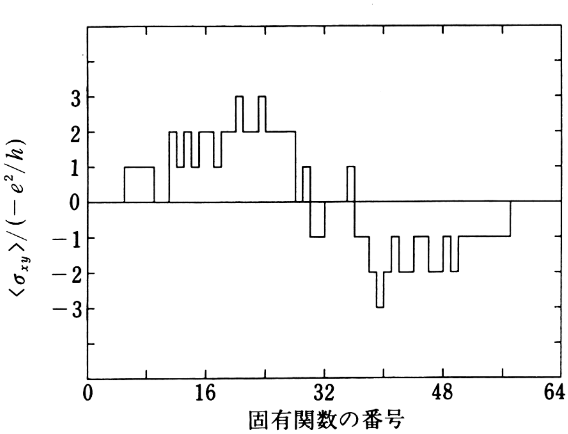


図4 有限不規則量子ホール系での磁束平均ホール伝導度の数値計算例[10]．

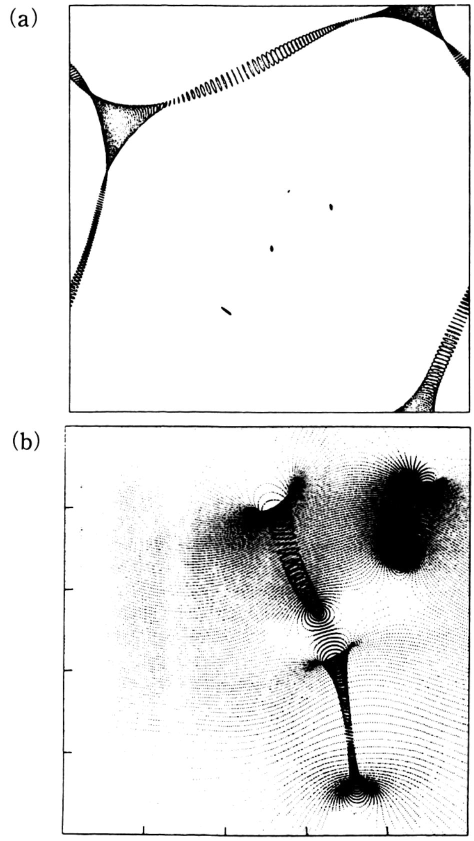


図 5　有限不規則量子ホール系での波動関数のゼロ点が，磁束 (A_x, A_y) を走査したときにどう動くかの数値計算例[11]．(a)はチャーン指数 0 の状態，(b)はチャーン指数が有限の状態．

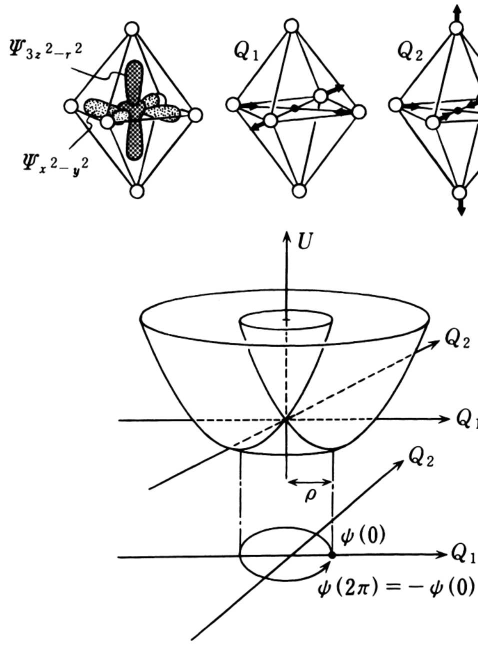


図 6　ヤーン・テラー系では，関数形の異なる 2 種類の電子波動関数と，それに結合する 2 種類のフォノン・モード Q_1, Q_2 がある（上図）．Q_1, Q_2 の関数としての（フォノンの運動エネルギーも含めた）ポテンシャル U の最低状態に対応する $Q_1=\rho\sin\theta$, $Q_2=\rho\cos\theta$ という円形経路に沿って一周すると，電子波動関数 ψ は符号を変える．

ータ（分子の場合は原子核の位置）を 360 度回転させると，符号を変える ($\Psi(2\pi)=-\Psi(0)$)，というのは，ロンゲット・ヒギンズ等のヤーン・テラー系の理論で既に 1950 年代に知られていたが[12]，これを，ベリーの位相と見なすことができる[13]．フォノンの波動関数 $\Psi_{\rm ph}$ も符号を変えるので，全波動関数 $\Psi\Psi_{\rm ph}$ はもちろん一価関数となる．

2 軌道を $|1\rangle, |2\rangle$ として，ハミルトニアンが

$$\begin{aligned} H_{\rm JT} &= Q_1(-|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 2|) \\ &\quad + Q_2(|1\rangle\langle 2|+|2\rangle\langle 1|) \\ &\equiv Q_1\tau_1 + Q_2\tau_3 \end{aligned}$$

である場合を考えよう．これはヤーン・テラー問題では有名な MX_6 型錯体に対応し，

$$|1\rangle \propto (3z^2-r^2), \quad |2\rangle \propto (x^2-y^2)$$

は電子二重項，Q_1, Q_2 は 2 種の基準振動になる（図 6 の添図）．このハミルトニアンは，$Q_1=\rho\sin\theta$, $Q_2=\rho\cos\theta$ とおくと

$$\psi_+ = \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|2\rangle,$$

$$\psi_- = -\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|2\rangle$$

という状態で対角化される．これらは $\theta\to\theta+2\pi$ で符号を変え，(Q_1, Q_2) を一周させたとき電子波動関数は π の余分な位相を得ることになる（図6）．

この現象は，状態 1 を擬スピン↑，状態 2 を擬スピン↓としたときの「パウリ行列」τ_1, τ_2, τ_3 を定義したとき，すぐに確かめられるように，これらがスピン演算子と同じ（リー）群構造を持つために，状態ベクトルがスピノールと同じ変換性を持つことから来ている．数学的には，このような線形に結合した複軌道系の対称群が 2 次元回転の二重群（回転量子数 $J=$ 半奇数）と同型である，と表現できる[13]．

このような2準位系は，孤立した分子やクラスターだけではなく，固体の結晶単位胞が各々2準位を持つ場合も考えられており[14]，その電子構造に興味が持たれている．

場の理論的には，一般に多成分場を考えたとき，幾何学的位相は重要な役割を果たし，（ボーア・ゾンマーフェルト流の）量子化そのものに影響を与えることも示されている[15]．

5．おわりに

このようなベリーの位相は直接観測にかかるものであろうか？　観測には，例えばロンゲット・ヒギンズ問題に対しては，分子やクラスターの角運動量が半奇数になり得ることを確かめればよい．興味ある読者は Na_3 クラスターに対する光学スペクトルの観測例を参照されたい[16]．別の系としては，光の伝播がある．光は横波であり，2成分を持つ．偏光を捻れた光学ファイバーを通して伝播させたときに偏光方向がどうなるか，という実験を考えることができる[17]．しかしこのような光学実験は，古典的な（マックスウェル方程式の枠内の）現象なのか，純粋に量子力学的な効果といえるのかという点は微妙で，批判の余地もあり得る[18]．

これは直接の観測ではないが，例えば分数量子ホール効果[8]における準粒子の電荷は分数電荷である，という議論のときにもベリーの位相を用いることができる．一般に準粒子の電荷 e^* のあいまい性ない定義は，準粒子を磁束量子 ϕ_0 の回りに断熱的に一周させ，そのときのベリーの位相

$$\gamma=2\pi(e^*/e)$$

から決める．実際，分数量子ホール系（クーロン相互作用する強磁場中2次元電子系）の基底状態（量子液体）からの素励起に対してこの計算を実行すると，ランダウ準位占有率を ν として，$e^*=\nu e$（例えばランダウ準位が1/3満ちているとき $e^*=e/3$）となる[19]．

以上で見たように，ベリーの位相は，数学的には接続の微分幾何学の問題と関わり，物理系としては分子，光学系をはじめとして電子・格子系，多体系等に適用され，場の理論的にも興味深い可能性を与え，量子力学的にのみ許される想像力を羽ばたかせる面白い方向を示唆している．

追記（1999年1月）

最近の発展としては，例えば以下のようなものがある：

（i）ここで解説したようなヤーン・テラー錯体が周期的に並んで結晶格子を組んだ場合に，周期性から来る電子状態の並進群構造がベリーの位相が現れるために変わり「拡張されたブロッホ状態」となり，バンド構造が質的に変わり得ることが小泉らにより示されている[21]．

（ii）グラファイトにおいては，結晶が峰の巣格子であるための2バンド構造を反映して，電子は質量ゼロのディラック粒子のスピノール場に対する「Weyl方程式」で記述される．グラファイトを円柱状に巻いて炭素ナノチューブにすると，電子の後方散乱が存在しなくなるという顕著な特徴が発生し，これがベリーの位相の効果により解釈されることが安藤らにより示されている[22]．

このように，物性物理学の様々なシーンでベリーの位相が考察されるようになってきている．

文　献

1) M. Berry, *Phys. Today*, 1990年12月号 p. 34（訳：パリティ 1991年6月号 p. 20）；倉辻比呂志，パリティ，1988年9月号 p. 26.
2) B. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 2167.
3) 小林昭七：曲線と曲面の微分幾何学（裳華房，1977）.
4) ヒルベルト，コーン・フォッセン：直観幾何学（みすず書房，1966）.
5) F. Wilczek and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 2111.
6) エニオンについては，例えば青木秀夫：科学 **61** (1991) 388.
7) ホルデイン理論を含め分数統計については，例えば1991年の湯川国際セミナー録，K. Ishikawa and Y. Nagaoka (eds)：Low-dimensional Field Theories and Condensed Matter Physics, Prog. theoret.

phys. suppl. No. 107 (1992).
8) 量子ホール効果については，例えば安藤恒也(編)：磁場と電子(丸善，1995).
9) D. J. Thouless *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 405 ; M. Kohmoto, *Ann. Phys.* **160** (1985) 343 ; H. Kuratsuji, *Phys. Lett.* A **120** (1987) 141.
10) H. Aoki and T. Ando, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 3093.
11) D. P. Arovas *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 619.
12) H. C. Longuet-Higgins *et al*, *Proc. Roy. Soc.* A **244** (1958) 1.
13) F. S. Ham, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 725.
14) 固体における複軌道系は，例えば K. Kuroki and H. Aoki, *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992) 3820 ; K. Kusakabe and H. Aoki, *Phys. Rev. Lett.*, **72** (1994) 144.
15) R. G. Littlejohn and W. G. Flynn, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 2839.
16) G. Delacretaz *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 2598.
17) A. Tomita and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 937.
18) F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 1788.
19) D. Arovas *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 722.
20) D. M. Bird and A. R. Preston, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 2863
21) H. Koizumi, T. Hotta and Y. Takada, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4518 ; *Int. J. Mod. Phys.* B, to be published.
22) T. Ando and T. Nakanishi, *J. Phys. Soc. Jpn* **67** (1998) 1704 ; T. Ando, T. Nakanishi and R. Saito, *ibid*, **67** (1988) 2857.

(あおき・ひでお，東京大学大学院理学系研究科)

Ⅳ. くりこみ群

Ⅳ. くりこみ群

くりこみ群と普遍性

田崎　晴明

1. はじめに

これは，くりこみ群についての初歩的な解説である．二つの簡単な例を通して，くりこみ群の基本的なアイディアと，くりこみ群からマクロなスケールでの普遍性を導く筋道を丁寧に説明した[1)]．一つ目の例は，おそらくは高校生にも理解できるだろうし，二つ目の例も大学三，四年生程度の物理の知識があればほぼ完全に理解できるはずだ．途中の計算を大幅に省略したり，わけのわからない近似を用いたりもしなかった．熟読すれば，現代の理論物理が生み出した最も美しく強力な方法論である「くりこみ群」と，物理学において最も重要な概念の一つである「普遍性」についてのかなり本質的な理解が得られるはずだ．二つ目の例からは，「おまけ」として，場の量子論における連続極限（あるいは「くりこみ」）を，現代的なくりこみ群の観点から理解するための基本的なアイディアを学ぶこともできる．これからくりこみ群を本格的に勉強しようという人，既にくりこみ群を勉強しているが本質をつかみきれていない人，さらには（こういう人が一番多いだろうけれど）くりこみ群とは何かは知りたいけれど普通の教科書や解説は難しくて敬遠してきた人，などなどに是非読んでいただきたい．

一見いいこと尽くめだが，残念ながら，この解説には致命的な欠点がある．それは，簡単な例というのは所詮は簡単だということだ．なんと言っても，くりこみ群の威力と魅力が最大限に発揮されるのは，くりこみ群を使わなければ解けない難しい問題に適用したときである．簡単な例への応用だけではくりこみ群の持っている魅力は半減してしまう．この手の解説に付き物の決まり文句を書くのは不本意だが，くりこみ群の真の美しさと力強さに接したいと感じた読者は，覚悟を決めてくりこみ群についての本格的な文献に挑戦していただきたい[2)]．

2. 普遍性について

物理学を学んでいて，「何故こんなにうまくいくのだろう？」という驚きや疑問を感じたことはないだろうか？　くりこみ群と直接の関係はないが，私は何年か前に量子スピン系の Haldane gap というとても面白い問題を研究していた．これは当時のちょっとした流行で，場の理論的手法を用いた近似理論，計算機実験，（私も参加した）数理物理的研究，そして，現実の系での実験など様々な方向から研究が進められていた．素晴らしいことに，これらの多彩なアプローチが実にうまくかみ合って研究が進んでいった．場の理論的な手法で予想されたことが，計算機実験で確かめられ，さらに本当の実験でも確認される．厳密な理論をもとに立てられた予想が，計算機で確かめられ，さ

らに実験でみつかっていた奇妙な事実がそれをもとに見事に説明される．物理は一つだという（最近忘れられがちな）事実をはっきりと感じさせてくれた[3]．

こういう成功例を見ていて，ふと「何故こんなにうまくいくのだろう？」と思ってしまう．確かに，近似理論，厳密な理論，計算機実験は，いずれも理想化したモデルを扱っているので，これらのつじつまが合うのはもっともなことだろう[*1]．しかし，実験と話が合うというのは，どういうことなのか？　理論的，数値実験的に研究されていたのは，一直線上にスピンがずらりと並んだ一次元量子スピン系である．現実には一次元的な系などはないから，実験で用いられたのは（三次元的な固まりの中で）ある一方向だけにスピンの結合が強い擬一次元系である．さらに，一口にスピン系とはいうが，現実の物質は Ni や Cl など何種類もの原子が実にややこしく絡み合ってできているし，そこには不純物だって混ざっているだろう．それでも，適切な実験（磁化測定，中性子散乱，ESR, NMR, 比熱測定と何でもある！）を行えば，理論を通して「見て」いるのと同じ一次元スピン系の振る舞いが，ありありと「見える」！　これは，やはり不思議なことではないだろうか？　不純物の影響，磁性を担う電子の運動の自由度，複雑な分子構造，さらには，原子の内部の自由度，原子核内部の自由度…といったミクロなレベルでのいわば無限の詳細な要素は顔を出さないのだろうか？実験結果を虚心坦懐に眺めれば，確かにこれらの無限の詳細は完全に静まり返っていて，その静かな背景の上に「スピン系」の自由度だけが生き生きと活動しているように思われるのである．

これこそが，（私見では）物理学を支える最も重要な概念である「普遍性（universality）」の一つの現れなのである[*2]．「普遍性」とは，物理系の（マクロな）振る舞いの本質的な部分が，系の（ミクロな）詳細には依存しないという経験事実を指す[*3]．「普遍性」は，物理学という営みを可能にするための不可欠な前提であると思う．仮に，実験で観測される結果に，非常に多くの詳細な要素が有意に関わってくるような状況があったとすると[*4]，それを説明するためのモデルは現実の系と同じだけの詳細を持った極めて複雑なものになってしまう．そのようなひたすら複雑なモデルを解析して理解することはおそらく人類には不可能だし，そういうことが仮にできたとしても，人類の知的な趣味からして面白くはなさそうだ．ある程度理想化したモデルを用いて（人間にも面白い）研究をすることに意味があるのは，「普遍性」の一つの現れなのである．Haldane gap の研究で，実験家と数理物理学者が同じ問題を扱い，同じ面白さや興奮を味わうことができたのは，まさに「普遍性」のおかげなのである．

残念ながら，スピン系の実験で「普遍性」が見られる本当の理由を我々は理解していない．これらの実験が（あるいは，もっと広く，有史以来の科学が）成功裏に進んできたという経験事実が，「普遍性」の存在を示唆しているだけである．そういう意味で，「普遍性」の起源を理解しようとすることは，物理（physics）の範囲から半歩外へ踏み出した “metaphysics” の領域に属するのかもしれない[*5]．

それでも，物理学は「普遍性」を理解するための

---

*1) 本当のことをいうと，場の理論的な手法がうまくいく背景には，普遍性があり，くりこみのアイディアがある．

*2) 専門家向けの注：ここで議論しているのは単なるエネルギースケールの分離であって，「普遍性」ではないという意見があるかもしれない．しかし，多自由度系ではエネルギースケールを分離するのはた易いことではないので，そこにも「普遍性」という言葉で括りたい理解し切れていない要素があると思う．たとえエネルギースケールの分離がうまく行えたとしても，低エネルギーの有効理論が理想的なスピン系と一致するとは考えられないので，この段階でも「普遍性」は必要である．もちろん，「臨界現象の普遍性は，より深いものを持っている」という意見には私も賛成である．

*3) 正確な歴史は知らないが，統計物理学での相転移と臨界現象の研究の過程ではじめて「普遍性」ということが明確に認識されたと言われている．

*4) これが度を越せば，実験は再現性を失い，科学の実験は不可能になる．

*5) 私は，「普遍性」は自然科学に存在基盤を与えてくれる（健全な）信仰であると思っている．ただし，全ての研究分野で「普遍性」が人類の味方をしてくれる（あるいは，してくれている）と信じるほど楽観的ではない．『数理科学』1997 年 4 月号の大野氏の記事，服部氏の記事では，「普遍性」の意義についての少しずつ異なった立場を見ることができるだろう．

努力を続けるべきだと思う．「普遍性」の本当の意味を少しずつ理解することで，我々の科学はその限界を少しずつ広げ，より豊かで深いものになっていくと信じる．「普遍性」の完全な意味での理解は，無限に遠い目標かも知れないが，限定された範囲での「普遍性」の理解は着実に可能になりつつある．そして，「くりこみ群」こそが，我々に「普遍性」について語る可能性を与えてくれる「ことば」なのである[*6)]．この解説の目標は，「くりこみ群」という「ことば」を用いてどうやって「普遍性」について語るのかを初歩的な例を通して眺めることである．

3. 池にたつ波[*7)]

静かな池のほとりに立って，池の真ん中あたりに小石を一つ投げ入れてみよう．ぽちゃんという音とともに水面が乱れ，輪の形をした波が平らだった水面を外に向かって広がっていく．波の輪が大きくなり，やがて我々の立っている岸辺に近づく頃，輪はどのような形をしているだろうか？　力学で学んだ方法論に従うとすると，小石が水面に落ちたときに作り出す乱れ（初期条件）を求め，そこから水面波の方程式に基づいて時間発展を計算し大きな波の輪の形を求めることになるだろう．

しかし，経験でも知っているように，大きく成長した波の輪はほぼ完璧な円形をしている．この形は投げ入れた小石の形状，大きさ，あるいは水に落ちたときの小石の運動の状態には左右されない．大きさ 2cm の丸い小石を投げ入れたときも，大きさ 10cm の角張った石を投げ入れたときも，ほぼ同じ時間の後にほぼ同じ円形の波の輪を見ることができる．ここには，「大きく成長した波の輪の形は，初期の水面の乱れの詳細には依存しない」という「普遍性」がある．

このような事情を考えれば，初期の乱れを特定してから時間発展を求めるという方法はあまり賢明とはいえない．最終的な答えが初期条件には（ほとんど）依存しないのに，わざわざ初期条件を特定するのは，ある意味で徒労である．実際問題としても，小石がどのように水面に落下したかを精度よく知るのは極めて困難だ．それよりも，どんな小石をどんな風に投げ入れたかを特定せずに，池の端近くまでやってきた波の輪の形がどうあるべきかが議論できないだろうか？　少し一般化した言い方をすれば，ミクロなスケールでの系の詳細（小石と，それが作り出す初期の乱れ）にとらわれずに，マクロなスケールでの現象（大きく成長した波の輪の形）の「普遍性」を直接に理解したい．くりこみ群のもっとも初歩的な応用として，この問題を取り上げてみよう．

具体的な解析を始めるために，波の輪の時間発展の規則をはっきりさせよう．時刻 t_0 における波の輪の形を表す閉曲線 $C(t_0)$ に以下のように Huygens の原理を適用すれば，その後の時刻 t_1 における波の輪の形 $C(t_1)$ がわかるとする[*8)]（図 1）．閉曲線 $C(t_0)$ の上に一点 P をとり，それを中心に半径 $v(t_1-t_0)$ の円を描く．v は波の伝播速度を

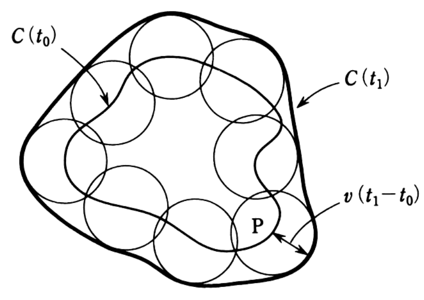


図 1　Huygens の原理により，時刻 t_0 の波の輪 $C(t_0)$ から，時刻 t_1 の波の輪 $C(t_1)$ を求める．

*6)　特別な場合に使える「ことば」は他にもある．例えば conformal field theory は二次元の場の理論の普遍性を語ることについては驚くほど強力な「ことば」である．

*7)　この節の冒頭の 3 つの段落は，『数理科学』1997 年 4 月号，大野克嗣・田崎晴明・東島清著「くりこみ理論の地平」からとったものである．

*8)　波動方程式 $(\partial^2/\partial t^2 - v^2\Delta)\varphi(t,\boldsymbol{r})=0$ で波が記述されるものとしよう．三次元では，Huygens の原理によって $\varphi(t,\boldsymbol{r})$ の振る舞いを完全に決定できるが，二次元では，そのような強い意味での Huygens の原理は成り立たない．ただし，水の乱れの一番外側の波の輪の時間発展は，次元によらず Huygens の原理で書き表せる．

表す定数であり，この円は，点 P から時間 (t_1-t_0) の間に乱れの伝わり得る範囲を表している．同じことを，$C(t_0)$ 上の全ての点について行い，最後に，全ての円の外側をなぞるように閉曲線を描けば $C(t_1)$ が得られる．

大きく育った波の輪の形を知るには，この時間発展の規則を用いればいい．しかし，ここではわざと遠回りをして，くりこみ群のアイディアを用いた議論をする．

まず，この問題のためのくりこみ変換を定義する．平面上に原点をとり，小石は原点の付近に投げ入れることにする．1 に比べて小さな数 $\delta > 0$ を固定する．C を原点を囲む任意の閉曲線とする．時間発展を求めたときと同様に，C 上の各点を中心に半径 δ の円を描き，それらの外側を囲む閉曲線 $\widetilde{C}$ を作る．$\widetilde{C}$ は C よりも一回り大きくなっている．$\widetilde{C}$ を C と同じスケールに引き戻してやるために，原点を中心に $\widetilde{C}$ を $(1+\delta)$ 分の 1 に縮小する．こうして得られた閉曲線を C' とする．

われわれのくりこみ変換 $\mathcal{R}$ とは，原点を囲む任意の閉曲線 C から，上の操作によって閉曲線 C' を作り出す写像である．これを，

$$C' = \mathcal{R}(C) \tag{1}$$

のように式で書くことにしよう．

しばらくは，波の時間発展の問題を離れて，くりこみ変換 $\mathcal{R}$ の性質を議論しよう．まず閉曲線 C が原点を中心にした半径 r の円だとしよう．すると，$\widetilde{C}$ は半径 $r+\delta$ の円であり，C' は半径 $f(r) \equiv (r+\delta)/(1+\delta)$ の円ということになる．特に $f(1)=1$ だから，半径 1 の円はくりこみ変換 $\mathcal{R}$ を施しても変化しない[*9]．原点を中心にした半径 1 の円 (unit circle) を C_{unit} とすれば，

$$C_{\mathrm{unit}} = \mathcal{R}(C_{\mathrm{unit}}) \tag{2}$$

が成り立つ．つまり，単位円 C_{unit} はくりこみ変換の固定点である[*10]．

原点を中心にした半径 r_0 の円に n 回のくりこみ変換を施して得られる円の半径を r_n としよう．r_n の満たす漸化式 $r_{j+1} = f(r_j)$ は簡単に解けて，

$$r_n = 1 + (r_0 - 1)(1+\delta)^{-n} \tag{3}$$

が得られる．$n \to \infty$ では r_n は 1 に収束する．つまり，原点を中心にした任意の半径の円にくりこみ変換 $\mathcal{R}$ を繰り返し施せば，いずれは固定点 C_{unit} に収束するのである．

同じ結論は，一般の閉曲線についても成り立つ．原点を囲む閉曲線 C に，くりこみ変換を n 回施して得られる閉曲線を

$$C_n = \underbrace{\mathcal{R} \circ \cdots \circ \mathcal{R}}_{n}(C) \tag{4}$$

と書く[*11]．閉曲線 C_j の原点との最短距離を $r_j^{\min}$，最大距離を $r_j^{\max}$ とする．これらの量は漸化（不等）式

$$r_{j+1}^{\max} = f(r_j^{\max}),\ r_{j+1}^{\min} \ge f(r_j^{\min})$$

を満たす．最大距離の方は等式で，最短距離の方は不等式になっている理由は，図を描いてみればすぐにわかる．これらの漸化（不等）式も，(3) と全く同様に解けて，

$$\begin{aligned} r_n^{\max} &= 1 + \frac{r_0^{\max}-1}{(1+\delta)^n}, \\ r_n^{\min} &\ge 1 + \frac{r_0^{\min}-1}{(1+\delta)^n} \end{aligned} \tag{5}$$

という関係が得られる．$r_n^{\max} \ge r_n^{\min}$ に注意すれば，$n \to \infty$ では $r_n^{\min}$ も $r_n^{\max}$ も 1 に収束すると言える．任意の C について，$n \to \infty$ で

$$C_n \to C_{\mathrm{unit}} \tag{6}$$

という収束[*12]が示された．

くりこみ群を使った議論では，動きのあるイメージを持つと見通しがよい．原点を囲む全ての閉曲線を集めた空間を考える．はじめにとった閉曲線

*9) 半径 1 に物理的に特別な意味があるわけではない．1 という数がでてきたのは，我々のくりこみ変換の定義のためである．

*10) 一般に，写像によって変化しないような点を固定点と呼ぶ．C_{unit} は図形なのに「点」とは奇妙だという気もするが，いまは原点を囲む全ての閉曲線の集合を考えていて，C_{unit} はその中の一つの要素＝「点」なのである．

*11) 中丸 $\circ$ は合成関数の記号．例えば，$f \circ g(x) = f(g(x))$．ここでは，$\mathcal{R}$ を n 回繰り返し作用させることを表す．

*12) この解説では，定義抜きで直感的に「収束」という言葉を使う．もちろん数学的に厳密な定義を与えることはできる．くりこみ群は数学的に厳密な解析にも十分に耐えるのである．『数理科学』1997 年 4 月号の服部氏と原氏の記事を参照．

C は，この空間の中の一点である．点 C にくりこみ変換 $\mathcal{R}$ を施すと，別の点 C_1 になり，さらに続ければ $C_2, C_3, \cdots$ と次々に新しい点が得られる．くりこみ変換で点が変換される様子を，比喩的に点が「時間発展」して移動したのだとみなすことにしよう*13)．すると閉曲線の列 $C, C_1, C_2, C_3, \cdots$ は，C を出発した点が空間の中を「時間発展」して作った「軌跡」だと解釈できる．(6) から，この軌跡は「時間」がたつと（つまり n が大きくなると）固定点 C_{unit} に吸い込まれていくこともわかる．

空間のどのような点（つまり，閉曲線）から出発しても，同じようなくりこみ群の「軌跡」を定めることができる．空間上の全ての点が「時間発展」する様相を，「くりこみ群の流れ」と呼ぶことにしよう．全ての閉曲線を合わせた空間の点は，「くりこみ群の流れ」にのって動いている．そして，全ての「軌跡」は，たった一つの固定点 C_{unit} に吸い込まれていく（図 2）．これが，くりこみ群の動きのあるイメージであり，また現象の普遍性を議論する鍵にもなる．

(6) がわかっていれば，大きく成長した波の輪の形を決めるのはごく簡単なことである．小石を投げ入れた直後に作られる波の輪の形を C としよう．C の原点からの距離が 1 のオーダーになるように，長さの尺度をうまくとる．波の輪が成長して，原点からの距離が $L(\gg 1)$ 程度になったときの輪の形を調べよう．くりこみ変換を十分に多い回数 n 繰り返せば，C は $C_n \simeq C_{\mathrm{unit}}$ に写される．ところで，くりこみ変換の元来の定義は，（本来の意味での）波の輪の時間発展と，$(1+\delta)^{-1}$ 倍のスケール変換の組み合わせであった．C から C_n を得るまでには n 回のスケール変換が行われ，全体のスケールは $(1+\delta)^n$ 分の 1 に縮小されている．このスケール変換を逆にたどって，物事を本来の長さのスケールで見るようにすれば，$C_n \simeq C_{\mathrm{unit}}$ は半径 $(1+\delta)^n$ の（大きな）円に対応する．ここで $L \simeq (1+\delta)^n$ となるように n を選べば，まさに C_n こそが求めたかった半径 L の波の輪に対応する．C_n がほぼ円形なのだから，それを拡大して得られる半径 L の波の輪も円に近くなくてはならない．これこそが，目標だった大きな波の輪の形の普遍性である．

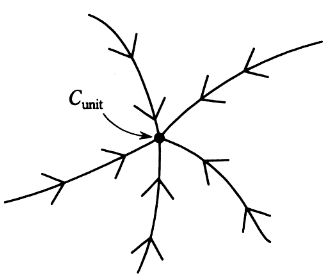


図 2　波の輪のくりこみ群による「流れ」のイメージ．全ての点（＝閉曲線）は固定点 C_{unit} に吸い込まれていく．

この議論で本質的なのは，波の輪の初期の形 C についての情報は全く用いず，くりこみ変換 $\mathcal{R}$ についての情報，特に固定点の性質を利用したという点である．大きく成長した波の輪がただ一つの固定点 C_{unit} に支配されていたために，完全な普遍性が見られたと言ってよいだろう．

4. ぐにゃぐにゃと曲がるひも

くりこみ群を解説するための二つ目の例として，非常に細長くて曲がりやすい物質（例えば高分子）が熱的ゆらぎを受けながらぐにゃぐにゃと自由にふるまっている状況を扱おう．理想化したモデルとして，多くの粒子が鎖状に次々とバネでつながった系を調べる（図 3）．隣り合った粒子の距離は我々には観測できないほど短いが，ひも全体のおおまかな形は観察できるというスケールを想定する．この問題では，マクロなスケールでのひもの形は，ミクロなスケールでのバネの詳細には依存しないという普遍性がある．それを，くりこみ群の言葉で理解したい．さらに，この普遍性をより精密に表現するために，二つのスケールを無限に分離する連続極限も考える．

まず，モデルを正確に設定する．三次元空間

*13)　もちろん，本来の時間発展と直接関係はない．それを強調するために，これらの比喩的な表現は，括弧にいれた．

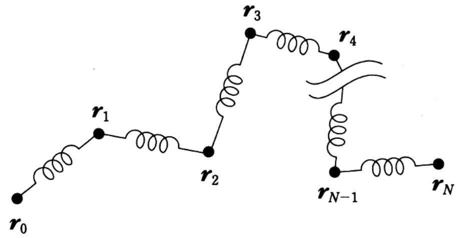


図 3 ぐにゃぐにゃ曲がるひもを理想化したモデル．たくさんの粒子が鎖状にバネで結ばれている．

の中に $N+1$ 個の質量 m の古典力学的粒子があるとし，それらの位置と運動量を $\boldsymbol{r}_j$，$\boldsymbol{p}_j$ $(j=0,1,2,\cdots,N)$ と書く．N は偶数とする．$N+1$ 個の粒子は鎖状に連なっていて，(鎖に沿った順番 j で数えて) 隣り合う粒子はポテンシャル $V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=V(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$ で表される二体力を及ぼし合っている．粒子の間にはそれ以外の相互作用はないとする[*14]．系全体のハミルトニアンは，

$$H=\sum_{j=0}^{N}\frac{|\boldsymbol{p}_j|^2}{2m}+\sum_{j=0}^{N-1}V(\boldsymbol{r}_j,\boldsymbol{r}_{j+1}) \qquad (7)$$

となる．

この系が熱浴と平衡にあるとして，古典統計力学のカノニカル分布を用いて議論を進めよう．ひもが，$\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{r}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{r}_N$ で指定される配置をとる確率密度[*15]は，運動量の自由度を先に積分してしまえば，

$$\begin{aligned}&P(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)\\&=Z^{-1}\exp\left[-\sum_{j=0}^{N-1}V(\boldsymbol{r}_j,\boldsymbol{r}_{j+1})\right]\end{aligned} \qquad (8)$$

と書ける[*16]．規格化定数（あるいは分配関数）Z は，規格化の条件

$$\int\left(\prod_{j=0}^{N}d^3\boldsymbol{r}_j\right)P(\boldsymbol{r}_0,\cdots,\boldsymbol{r}_N)=1$$

により定める．

5. くりこみ変換

この問題のためのくりこみ変換を定義しよう．変換の最初のステップでは，奇数番目の粒子の位置座標を積分する．(これは，水の波で輪を δ だけ成長させたところに対応する．) こうして作られる

$$\begin{aligned}&\tilde{P}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_4,\cdots,\boldsymbol{r}_{N-2},\boldsymbol{r}_N)\\&=\int\left(\prod_{j=0}^{(N/2)-1}d^3\boldsymbol{r}_{2j+1}\right)P(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)\end{aligned} \qquad (9)$$

を，粗視化された確率密度という．この定義式に (8) を代入すると，

$$\begin{aligned}&\tilde{P}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N)\\&=Z^{-1}\prod_{j=0}^{(N/2)-1}\int d^3\boldsymbol{s}\,\exp[-V(\boldsymbol{r}_{2j},\boldsymbol{s})\\&\quad-V(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}_{2(j+1)})]\end{aligned} \qquad (10)$$

と書けることに注意しておく．ここで，$\boldsymbol{r}_{2j+1}$ と書いていた変数を（積分変数の名前は何と呼んでもよいから）$\boldsymbol{s}$ と書いた．

くりこみ変換の二つ目のステップは，水の波の場合と同じスケール変換である．粗視化された確率密度をもとの確率密度になるべく似せるために，

$$\begin{aligned}&P'(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_{N/2})\\&=2^{N/2}\tilde{P}(\sqrt{2}\boldsymbol{r}_0,\sqrt{2}\boldsymbol{r}_1,\cdots,\sqrt{2}\boldsymbol{r}_{N/2})\end{aligned} \qquad (11)$$

と置く．いままで $0,2,4,6,\cdots,N$ と呼んでいた粒子の番号を $1,2,3,\cdots,N/2$ と呼び直すとともに，全体の長さのスケールを $1/\sqrt{2}$ 倍したのである．スケール変換を行った理由は，後でわかる．右辺の $2^{N/2}$ は，P' が確率密度として正しく規格化されるように付けた．

確率密度 P から別の確率密度 P' を作り出す操作をくりこみ変換と呼び，再び $\mathcal{R}$ という記号で表そう．くりこみ変換を抽象的に，

*14) 鎖がぐにゃぐにゃと曲がるから，鎖の上の順番で言えば遠く離れている 2 つの粒子が，実際の空間では近くにやってくることがある．そのとき 2 つの粒子は何らかの力を及ぼし合うはずだが，ここではそのような力を無視した「理想鎖」を考えている．「理想鎖」は近似というよりも，物事を考え始める出発点になる理論的なモデルである．

*15) $3(N+1)$ 次元の配位空間の中の点 $(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)$ を含む体積 ΔV の微少な領域の中に系が見いだされる確率が，$P(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N)\Delta V$ で与えられる．

*16) $V(\boldsymbol{r}_{j+1},\boldsymbol{r}_j)$ を $k_\mathrm{B}T$ で割るべきだが，ここでは $k_\mathrm{B}T$ を吸収するように V を再定義したと思うことにする．

$$P' = \mathcal{R}(P) \tag{12}$$

と書く．ここで (10) を (11) に代入すれば，

$$P'(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N/2}) \propto \prod_{j=0}^{(N/2)-1} \int d^3\boldsymbol{s} \exp[-V(\sqrt{2}\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{s}) - V(\boldsymbol{s}, \sqrt{2}\boldsymbol{r}_{j+1})] \tag{13}$$

となる[*17)]．ここで，

$$\exp[-V'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')] \propto \int d^3\boldsymbol{s} \exp[-V(\sqrt{2}\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) - V(s, \sqrt{2}\boldsymbol{r}')] \tag{14}$$

と規格化条件 $V'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = 0$ によって新しいポテンシャル V' を定義する．すると，(13) から直ちに，

$$P'(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_{N/2}) \propto \exp\left[-\sum_{j=0}^{(N/2)-1} V'(\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{r}_{j+1})\right] \tag{15}$$

が得られる．

(15) は，確率密度 P の定義式 (8) とそっくりの形をしている．そこで，くりこみ変換を，ポテンシャル V を与えて新しいポテンシャル V' を作る変換とみなすこともできる．混同する心配はないだろうから，いままでと同じ記号 $\mathcal{R}$ を用いて，このくりこみ変換を，

$$V' = \mathcal{R}(V) \tag{16}$$

のように書く．

もし N が 2^n の倍数ならば，少なくとも n 回のくりこみ変換を行うことができる．その結果を，分布関数については，

$$P_n = \underbrace{\mathcal{R} \circ \cdots \circ \mathcal{R}}_{n}(P) \tag{17}$$

のように，ポテンシャルについては，

$$V_n = \underbrace{\mathcal{R} \circ \cdots \circ \mathcal{R}}_{n}(V) \tag{18}$$

のように書く．(8), (15) の一般化として，

$$P_n(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_{N/2^n}) \propto \exp\left[-\sum_{j=0}^{(N/2^n)-1} V_n(\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{r}_{j+1})\right] \tag{19}$$

が成り立つことは簡単にわかるだろう．

6. くりこみ変換の性質

理想的なバネを表すポテンシャルを

$$U_\alpha(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{\alpha}{2}|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2 \tag{20}$$

とする．ポテンシャルのくりこみ変換の式 (14) で，$V = U_\alpha$ としてみよう．右辺の指数関数の中身は，

$$-\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{2}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}\right)^2 - \frac{\alpha}{2}\left(\boldsymbol{s} - \sqrt{2}\boldsymbol{r}'\right)^2 = -\alpha\left(\boldsymbol{s} - \frac{\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{\alpha}{2}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')^2$$

と整理できる．ここで，

$$\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{s} - (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}')/\sqrt{2}$$

と変数変換すれば，(14) の右辺の積分は単純なガウス積分になる．積分の結果は $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ によらない定数となり，規格化条件に注意すれば，

$$V'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = (\alpha/2)(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')^2$$

がわかる．くりこみ変換の言葉で言えば，

$$\mathcal{R}(U_\alpha) = U_\alpha. \tag{21}$$

つまり，理想的なバネのポテンシャル U_α は，くりこみ変換 $\mathcal{R}$ の固定点なのである．くりこみ変換の二つ目のステップでスケール変換を行ったのは，U_α を固定点にするためだった．

もう少し一般的なポテンシャルを考えてみよう．$V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s})$ が $\boldsymbol{s}$ だけの関数で，また $\exp[-V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s})]$ が $\boldsymbol{s}$ について Fourier 変換可能であるとする．V に対応する波数表示 $\widehat{V}$ を，

$$e^{-\widehat{V}(\boldsymbol{k})} = \int d^3\boldsymbol{s}\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s}} e^{-V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})} \tag{22}$$

で定める．(22) に対応する逆変換は，

$$e^{-V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')} = (2\pi)^{-3} \int d^3\boldsymbol{k}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} e^{-\widehat{V}(\boldsymbol{k})} \tag{23}$$

*17)　$\propto$ は「比例する」ことを表す記号であり，右辺に $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \cdots$ によらない定数をかけたものが左辺に等しいことを意味する．

である．ここで波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ についての積分は各成分について $-\infty$ から ∞ まで行う．

(23) の表示を (14) の右辺に代入する．Fourier 変換の常套手段に従って積分の順序を交換すると，

$$
\begin{aligned}
&e^{-V'(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')} \\
&\propto \int d^3\boldsymbol{s} \exp[-V(\sqrt{2}\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) - V(\boldsymbol{s},\sqrt{2}\boldsymbol{r}')] \\
&= (2\pi)^{-6} \int d^3\boldsymbol{s}\, d^3\boldsymbol{k}\, d^3\boldsymbol{k}'\, e^{-\widehat{V}(\boldsymbol{k})-\widehat{V}(\boldsymbol{k}')} \\
&\qquad \times e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\sqrt{2}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s})+i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{s}-\sqrt{2}\boldsymbol{r}')} \\
&= (2\pi)^{-3} \int d^3\boldsymbol{k}\, d^3\boldsymbol{k}'\, e^{-\widehat{V}(\boldsymbol{k})-\widehat{V}(\boldsymbol{k}')} \\
&\qquad \times e^{i\sqrt{2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}')}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \\
&= (2\pi)^{-3} \int d^3\boldsymbol{k}\, e^{-2\widehat{V}(\boldsymbol{k})} e^{i\sqrt{2}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \\
&= (2\sqrt{2}\pi)^{-3} \int d^3\boldsymbol{k}\, e^{-2\widehat{V}(\boldsymbol{k}/\sqrt{2})} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

となる．最後の行を導く際に $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k}/\sqrt{2}$ と変数変換した．(22), (23) にならって V' の波数表示 $\widehat{V}'$ を導入すれば，(24) より直ちに

$$
\widehat{V}'(\boldsymbol{k}) = 2\widehat{V}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}\right) + (\text{定数}) \tag{25}
$$

が得られる．ここで，定数は規格化の条件 $V'(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}) = 0$ から定まる．(25) は，くりこみ変換の波数空間での表示である．

ここで，簡単のために $\widehat{V}(\boldsymbol{k})$ は $|\boldsymbol{k}|^2$ について，

$$
\begin{aligned}
\widehat{V}(\boldsymbol{k}) &= \beta_0 + \beta_2|\boldsymbol{k}|^2 + \beta_4|\boldsymbol{k}|^4 + \cdots \\
&\quad + \beta_{2j}|\boldsymbol{k}|^{2j} + \cdots
\end{aligned}
\tag{26}
$$

のように Taylor 展開できると仮定しよう．すると，(25) より直ちに

$$
\begin{aligned}
\widehat{V}'(\boldsymbol{k}) &= \beta_0' + \beta_2|\boldsymbol{k}|^2 + \frac{\beta_4|\boldsymbol{k}|^4}{2} + \cdots \\
&\quad + \frac{\beta_{2j}|\boldsymbol{k}|^{2j}}{2^{j-1}} + \cdots
\end{aligned}
\tag{27}
$$

となる．つまり $|\boldsymbol{k}|^2$ の係数は不変で，それ以上の次数の項の係数は小さくなる．

さらにくりこみ変換を繰り返し適用すれば，例えば $|\boldsymbol{k}|^4$ の係数は，1/4, 1/8, 1/16 とどんどん小さくなっていく．n 回のくりこみ変換で得られるポテンシャル V_n (18) の波数表示を $\widehat{V}_n$ とする．上の考察から，$n \to \infty$ では，

$$
\widehat{V}_n(\boldsymbol{k}) \to \tilde{\beta}_0 + \beta_2|\boldsymbol{k}|^2 \tag{28}
$$

となることがわかる．さらに，Fourier 逆変換を施すことで，$n \to \infty$ で

$$
V_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \to U_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{\alpha}{2}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2 \tag{29}
$$

がいえる．ただし $\alpha = (2\beta_2)^{-1}$ とした．

こうして，理想的なバネのポテンシャル U_α はくりこみ変換の固定点であること，そして，上の仮定 (26) を満たす一般のポテンシャル V は，くりこみ変換を繰り返せばこの固定点に吸い込まれていくことがわかった．「くりこみ群の流れ」を思い浮かべよう．今度は，様々なポテンシャルを集めた空間の中で，点（つまり，ポテンシャル）がくりこみ変換 $\mathcal{R}$ によって「時間発展」していく．そして，点が動いた「軌跡」はいずれかの U_α に吸い込まれていくのである．

7. 大きいスケールでのひもの振る舞い

非常に多くの粒子がつながってひもを構成している状況を考えたい．大きな整数 L をとり，$N = 2^L$ とする．いままでのように $N+1$ 個の粒子がつながった系をとり，隣り合った粒子をつなぐポテンシャル $V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ の波数表示は，

$$
\widehat{V}(\boldsymbol{k}) = \beta_0 + \frac{1}{2\alpha_0}|\boldsymbol{k}|^2 + \cdots \tag{30}
$$

のように Taylor 展開できるとする．

大きなスケールでのひもの振る舞いを調べるために，次のような工夫をしよう．$l \ll L$ を満たす整数 l を取り，ひもの上に（ひもに沿って）等間隔に $2^l + 1$ 個の粒子を拾い出し，これらの位置にだけ注目する．これらの代表点に，名前を付けて，

$$
\boldsymbol{R}_j = \boldsymbol{r}_{Mj}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, 2^l \tag{31}
$$

と呼ぼう．ただし $M = 2^{L-l}$ である．

ひもの上の代表点が，$\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{R}_1, \cdots, \boldsymbol{R}_{2^l}$ という配置をとる確率密度は，もちろん

$$\widehat{P}(\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{R}_1, \cdots, \boldsymbol{R}_{2^l})$$
$$= \int \left(\prod_{j=0}^{N} d^3\boldsymbol{r}_j \right) \left(\prod_{p=0}^{2^l} \delta(\boldsymbol{R}_p - \boldsymbol{r}_{Mp}) \right)$$
$$\times P(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) \qquad (32)$$

である．ここで確率分布のくりこみ変換の定義 (9), (11), (12), (17) を思い起こせば，

$$\widehat{P}(\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{R}_1, \cdots, \boldsymbol{R}_{2^l})$$
$$\propto P_{L-l}\left(\frac{\boldsymbol{R}_0}{\sqrt{M}}, \frac{\boldsymbol{R}_1}{\sqrt{M}}, \cdots, \frac{\boldsymbol{R}_{2^l}}{\sqrt{M}} \right)$$
$$\propto \exp\left[-\sum_{j=0}^{2^l-1} V_{L-l}\left(\frac{\boldsymbol{R}_j}{\sqrt{M}}, \frac{\boldsymbol{R}_{j+1}}{\sqrt{M}} \right) \right] \qquad (33)$$

と書くことができる．ここで (19) を用いた．$L-l$ は非常に大きな数なので，くりこみ変換を $L-l$ 回施されたポテンシャル V_{L-l} については (29) を用いることができて，

$$\widehat{P}(\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{R}_1, \cdots, \boldsymbol{R}_{2^l})$$
$$\propto \exp\left[-\frac{\alpha_0}{2} \sum_{j=0}^{2^l-1} \left(\frac{\boldsymbol{R}_{j+1}}{\sqrt{M}} - \frac{\boldsymbol{R}_j}{\sqrt{M}} \right)^2 \right]$$
$$= \exp\left[-\frac{\alpha_{\text{phys}}}{2} \sum_{j=0}^{2^l-1} (\boldsymbol{R}_{j+1} - \boldsymbol{R}_j)^2 \right] \qquad (34)$$

となることがわかる．ここで，物理的なバネ定数（あるいはくりこまれたバネ定数）を

$$\alpha_{\text{phys}} = \alpha_0 / M = 2^{l-L} \alpha_0 \qquad (35)$$

と定義した．(34) が，我々の一つの結論である．これが意味するのは，代表点 $\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{R}_1, \cdots, \boldsymbol{R}_{2^l}$ のみに注目すれば，この系は $2^l + 1$ 個の粒子が（実効的な）バネ定数 α_{phys} の理想的なバネでつながった系のように見えるということである．この結論は，隣り合う粒子間の（ミクロなスケールでの）力を記述するポテンシャル $V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ の詳細には依存しない．目標だったマクロなスケールでのひもの振る舞いについての普遍性が，示されたことになる[*18]．ここでも，マクロなスケールでの普遍的な振る舞いは，くりこみ変換の固定点に支配されていることに注意したい．

*18） この場合の普遍性は，本質的には確率論の中心極限定理と同じ内容を表している．

8. 連続極限

ミクロなスケールとマクロなスケールが無限に隔たった極限を連続極限という．連続極限は，ミクロなスケールでの系の詳細に全く煩わされずにマクロなスケールでの普遍的な振る舞いだけを抽出するための理論的な理想化である[*19]．

ひもの系で連続極限を取る（あるいは，「くりこみ」の手続きを実行する）のは技術的には簡単なことだが，一般的な考え方をはっきりさせるために少し丁寧に説明しよう．まず，正の整数 l と有限の数 α_{phys} を選び，これらを固定する．先ほどと同様に，ひもの中から等間隔に $2^l + 1$ 個の粒子を拾い出し，それらの振る舞いを観察することにしよう．そのときに，これらの粒子がバネ定数 α_{phys} の理想的なバネでつながっているように見えることを要請する．このように，観測できる量を使って系を特徴づけることを「くりこみ処方」という．

次に，仮に有限の L を取り，$N = 2^L$ に対応する鎖を考える．ポテンシャル $V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ は，(30) に現れるパラメターが (35) を逆に解いた

$$\alpha_0 = \alpha_0(L) = 2^{L-l} \alpha_{\text{phys}} \qquad (36)$$

を満たすように選ぶ．これだけでは，$V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ は一つには決まらないが，それは気にしない．α_{phys} のような観測できるパラメターを「物理的なパラメター」あるいは「くりこまれたパラメター」と呼び，$\alpha_0(L)$ のようなミクロなスケールの（直接は観測できない）パラメターを「裸のパラメター」と呼ぶ[*20]．

最後に，L を無限に大きくする極限をとる．こ

*19） 場の量子論の場合には，基本になる時空間が連続体なので連続極限を取る必要があるという言い方をすることがあるが，話はそれほど単純ではない．たとえ場の量子論といえども，（連続時空上の究極のミクロな理論を考えていると信じている場合以外には）非常に小さなスケール（高いエネルギー）では，別の理論の効果が顔を出すことを前提にしているからである．

*20） これらは，場の量子論のくりこみについての理解が曖昧だった時期に付けられた名称なので，（特に「裸の」というのは）現代の観点からはあまりいただけない．

のとき，裸のパラメター $\alpha_0(L)$ は，(36) に従って，L に伴って変化させてやる．そうすると，マクロなスケールでは，はじめに要請した振る舞いが自動的に保たれる．同時に，系の最小のスケールは無限小になる．マクロなスケールでの普遍的な振る舞いだけを抽出した理論を構成することができたことになる*21)．

連続極限を構成する際に，観測点の個数を決めるパラメター l を固定した．しかし，l が特定の値に固定されているかどうかには関わらず，連続極限の理論はきちんと存在するはずだ*22)．同じ理論で l の値を変えたときに，系がどのように見えるかを考えてみよう*23)．

正の整数 l' を取り，連続極限のひもから，等間隔に $2^{l'}+1$ 個の代表点を拾い出す．これらの点は，やはり理想的なバネで鎖状につながれているように見えるはずだから，そのバネ定数を $\alpha_{\mathrm{phys}}^{(l')}$ と書く．$\alpha_{\mathrm{phys}}^{(l')}$ が，観測のスケールを l' で決めたときの物理的なバネ定数である*24)．

いまの問題では，(36) で L を（仮に）固定すれば，

$$\alpha_{\mathrm{phys}}^{(l+1)} = 2\alpha_{\mathrm{phys}}^{(l)} \tag{37}$$

が得られ，この関係は $L \to \infty$ の極限でも意味を持つ．この関係を満たすようにして作った $\alpha_{\mathrm{phys}}^{(l)}$ が，求めていた l 依存性のある物理的なパラメターに他ならない．(37) は場の量子論的なくりこみ群で「くりこみ群方程式」と呼ばれるものに相当する．

*21) 連続極限では裸のパラメター $\alpha_0(L)$ は形式的に発散している．しかし，我々が注目するのはあくまでもマクロなスケールでの系の振る舞いなのだから，これは別に困ったことではない．同じ注意は場の量子論における裸のパラメターの発散についてもあてはまる．（ただし，その場合の発散の機構はずっとデリケートだが．）

*22) 連続極限でのひもは，数学的にはブラウン運動の軌跡として記述できる．これは，（フラクタル）次元 2 を持つ典型的なランダムなフラクタル図形である．

*23) l については，当初は $l \ll L$ という制限があった．しかし，$L \to \infty$ の極限を取った後では，l は任意の正の値を取って構わない．連続極限の便利なところである．

*24) 同じことを次のようにも言える．（ある意味で，この方が正確な言い方でもある．）くりこみ処方の際に，l と $\alpha_{\mathrm{phys}}^{(l)}$ を与える代わりに，別の l' と $\alpha_{\mathrm{phys}}^{(l')}$ を与えて，しかも寸分違わぬ連続極限の理論が欲しい．そのためには，l' と $\alpha_{\mathrm{phys}}^{(l')}$ をどう決めればよいか．

9. 何が足りないか

簡単な例は所詮は簡単だとはじめに書いた．確かに，波の輪の例では，Huygens の原理を見れば輪が大きくなるほど円形に近づくことは自明である．ひもの例は，もう少しややこしいが，くりこみ群的な方法なしで同じ結果を導くこともできる．

そういった問題の難易度のことは忘れるとして，特にくりこみ群の視点から，簡単になり過ぎていると思われる点を三つ挙げる．

- くりこみ変換の固定点が一つしかなく*25)，全ての「軌跡」はその一点に吸い込まれていた．そのために，普遍的な構造は唯一つしか見いだされなかった．水の流れが多様なように，一般には「くりこみ群の流れ」も多様であり得る．複数の固定点がある問題では，状況に応じて異なった普遍的な構造が見いだされ，物理はより豊かになる．
- 固定点は，円や理想的なバネのような「当たり前の」構造を表現していた．固定点が（非線形性を反映した）「当たり前でない」構造をしているときにこそ，本質的に面白い物理が見られ*26)，くりこみ群の方法が最大の威力を発揮する．
- くりこみ変換の設定や計算がとても簡単にできた．一般の問題では，くりこみ変換を正確に定義するのさえ困難なことが多い*27)．

これらの問題点が何を意味しているのかを正確に知るためには，本格的なくりこみ群の応用に立ち向かうしかないのだろう．

それでも，多くの読者には，例えば一つ目の問

*25) ひもの場合には，α の選び方に応じて無限個の固定点があったが，それらはスケール変換で結びついているので，実質的には同じものと考える．

*26) 「当たり前でない」固定点は，異常次元（『数理科学』1997 年 4 月号の大野氏の記事を参照）を持つことが多い．ただし「当たり前でない」固定点を数学的に厳密に扱うのは至難の技であり，現在までに成功した例はほんのわずかしかない．『数理科学』1997 年 4 月号の原氏の記事を参照．

*27) これは，単に技術的な問題ではなく，我々がくりこみ群を見る「数学的な目」が未発達なためではないかと感じる．『数理科学』1997 年 4 月号の服部氏の記事（特に 8 節）を参照．

題点で私が示唆していることが漠然と想像できるのではないだろうか？　もしそうだとすれば，読者は，抽象的な空間の中での「くりこみ群の流れ」のイメージを把握し，くりこみ群という「ことば」を用いて「普遍性」を語る新しい視点を獲得しつつあるといえる．この拙い解説を書いた私の目的は十二分に達成されたといえよう．

この解説に貴重なコメントをくださった大野克嗣氏と石原正也氏に感謝したい．

参考文献

1) 田崎晴明：「くりこみ群とは何か」（パリティ 1996 年6 月号）では，半ば同様の主旨で，くりこみ群による臨界現象の扱いをやはり初歩的な例を通して論じた．

2) 本別冊や『数理科学』1997 年 4 月号，特集「くりこみ理論の地平」のいくつかの記事から本格的な応用についての文献を知ることができるだろう．江沢洋，渡辺敬二，鈴木増雄，田崎晴明，「くりこみ群の方法」，**岩波講座・現代の物理学 13**（岩波書店，1995）の第 3, 4 章は φ^4 模型のくりこみ群による扱いについての丁寧な解説だが，読みこなすのは困難かもしれない．

3) 勝又紘一，田崎晴明編・著：「Haldane gap — スピン系におけるマクロな量子現象」（日本物理学会，新刊物理学論文選集 8）

（たざき・はるあき，学習院大学理学部
http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/halj.htm）

IV. くりこみ群

非摂動論的くりこみ群

素粒子の質量の謎に迫る

青木　健一

1. はじめに

現代の素粒子論では素粒子の種々の性質，すなわち相互作用や質量の多様性は，カイラル対称性と呼ばれる非常に大きな対称性が「自発的」に破れて生じると考えられている．つまり，多様な素粒子はミクロの世界では全て対等で同等な相互作用をしているのだが，マクロの世界ではこういう同等な状態は不安定になり，むしろ同等でない状態の方が安定になって，我々の宇宙はその安定な状態に落ち着いてきたというわけである．したがって，「カイラル対称性の自発的な破れ」は素粒子の謎を解く鍵である．

1970 年代初めにウィルソンによって展開されたいわゆる非摂動論的くりこみ群[1]は，物性物理学の諸分野で大きな成果を挙げてきた．しかし素粒子論においては，格子理論のシミュレーション以外には，最近まで本格的な研究はされてこなかった．1970 年代以降の素粒子論の大発展においては，むしろ摂動論的くりこみ群が主役となり，大統一理論や超対称統一理論を生みだした．これは，摂動論的くりこみ群でも十分に機能してきたことに加えて，ウィルソンの非摂動論的くりこみ群が必然的にエネルギーの「切断」の概念を含むために，素粒子論の基本原理であるゲージ対称性との相性が極めて悪いことにもよっていた．

最近になってようやく，非摂動論的くりこみ群が素粒子論に適用されはじめ，その有効性が改めて明らかになってきた．特に著者らは，ゲージ理論でのカイラル対称性の自発的な破れを解析しているが，ここでは特に予備知識を仮定せずに，これらの研究の本質的な内容を伝えたい[7]．なお，くりこみ理論全般についての著者による初等的な解説[2,3]も参考になるだろう．

2. 対称性の自発的破れ

対称性の自発的な破れというのは，量子論，それも無限大の自由度を持つ場の量子論（あるいは統計力学）に固有の概念であるが，ここではまず

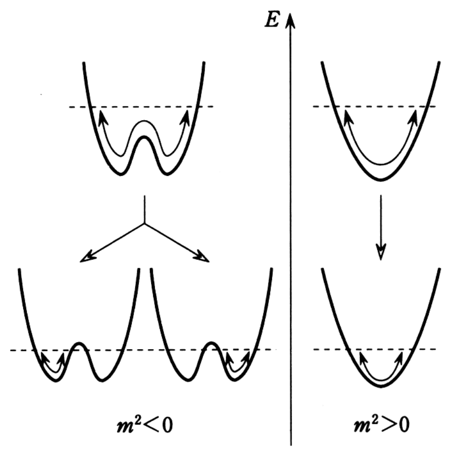


図 1　ポテンシャル中の粒子の運動．パラメータ m^2 と粒子のエネルギー E によって粒子の運動は 2 つの異なる様相を示す．

古典力学の世界でイメージを作ろう．1 次元のポテンシャルの中を運動する粒子を考える．ポテンシャルは，粒子の位置を x として，

$$V(x) = m^2x^2 + \lambda\, x^4 \quad (\lambda > 0) \tag{1}$$

の形をとる．この中での粒子の運動は，ポテンシャルのパラメータ m^2 の符号と粒子のエネルギー E に応じて図 1 のように変化する．

ポテンシャルの m^2 が正なら，エネルギー E を下げていっても粒子の運動は $x = 0$ を中心にした振動のままで，その振幅が小さくなっていくだけである．そしてエネルギーの一番低い状態は真ん中の $x = 0$，1 つである．ところが，m^2 が負の場合には，エネルギー E が真ん中の山より低くなると，粒子の運動は左か右かのどちらかの谷底を中心とする運動となる．粒子の位置の期待値（平均値）は，エネルギーが高い場合には 0 だが，どちらかの谷の内部の運動に変われば，正または負の値となる．エネルギーの一番低い状態として左右の 2 つの状態があり，粒子の位置 x の値が正か負かで区別されている．

エネルギーの一番低い状態を素粒子論では真空と呼ぶ．そこで，この $m^2 < 0$ の状況を，x が真空期待値をもって自発的に対称性が破れている，という．つまり，系の本来の性質としては，x を $-x$ にしても物理は不変であり，左右は対称で区別がないのであるが，真空はどちらかの谷底になってしまうので，その真空を中心とする世界ではもはや左右の対称性はなくなるわけである．

ここでは x を粒子の位置と考えているが，これは場の理論では場の量に対応する．場が磁気能率を持ったスピンのようなものなら，この状況は自発磁化が生じる状況に対応している．パラメータ m^2 を正から負に動かすと，エネルギーの低い状態は，スピンの期待値が 0 である状態から正か負のどちらかの値をとる状態に移行してしまう．つまり，真ん中の状態は不安定になり，どちらかに片寄った状態の方がエネルギーをより低くできて安定になるわけである．

自発磁化を調べるような物性物理学の場合には，パラメータ m^2 を変えるには系の温度を変えればよい．素粒子論では，これは場の量子の質量の 2 乗であり，それでここでは m^2 と記している．パラメータ m^2 の値によって系の様相は大きく変わり，その境界を臨界点と呼ぶ．この古典力学系では臨界点はちょうど $m^2 = 0$ になっている．

3. 量子力学と摂動論

この系を量子力学で扱おう．系の性質を決めるポテンシャルエネルギーに量子補正が加わる．量子力学では x という物理量はオペレータ（演算子）となり，量子を生成または消滅させることができる．量子を生成するオペレータを $\alpha^\dagger$，消滅させるオペレータを α とすると，

$$x = \alpha^\dagger + \alpha$$

と書ける．すると，x^2 というオペレータは量子を消滅させてすぐ生成する（$\alpha^\dagger\alpha$）．また，2 つの量子を同時に生成したり（$\alpha^\dagger\alpha^\dagger$），同時に消滅させる（$\alpha\alpha$）こともできる．このオペレータは量子が伝播していく様子を表し，量子の質量を決める．(1) 式のポテンシャルの第 2 項にあった x^4 オペレータは 4 つの量子の生成消滅，すなわち相互作用を表す．パラメータ λ はこの 4 次の相互作用の強さを決めている．これらを図 2 のようにファインマン図形と呼ばれるグラフで表現する．

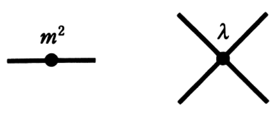


図 2　2 次と 4 次の項のファインマン図形．

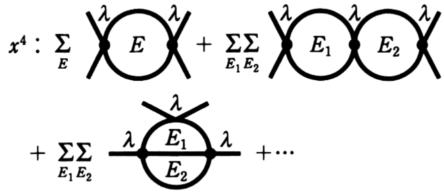


図 3　4 次の相互作用への量子補正．

さて，量子補正をどのように計算するかをファインマン図形を用いて説明しよう．例えば4次 (x^4) 相互作用には，図3のような量子補正が加わる．補正の最初の項を例にとると，これは2つの4次相互作用によって引き起こされている．1つ目の4次相互作用で，2つの量子が別の2つの量子になり，2つ目の4次相互作用で，その2つの量子がまた別の2つの量子になる．これを合わせて見れば，外側の4つの量子の相互作用となっている．内側にある2つの量子は中間状態，あるいは仮想状態と呼ばれる状態であって，エネルギーが E の2つの量子からなっている．このエネルギー E はなんでもよい．つまり0から ∞ までの場合を全て足す必要がある．このように中間状態として全てのエネルギー状態を足す，というのが量子補正の特徴である．

図3で，第1項のグラフはループが1つあり，対応する仮想状態のエネルギーの和（積分）が1つあって，1ループのグラフと呼ばれる．第2項と第3項は，2ループのグラフである．そして，無限個のループまでの全てのループの寄与を足したものが正しい量子補正である．こういう量子補正の入ったポテンシャルを有効ポテンシャルと呼ぶ．

$$V_{\text{eff}} = m_{\text{eff}}^2\, x^2 + \lambda_{\text{eff}}\, x^4 + \lambda_{6\text{eff}}\, x^6 + \cdots. \tag{2}$$

有効ポテンシャルには，6次 (λ_6) やそれ以上の項も全て現れてくる．（奇数次の項は，もともとの理論の対称性のおかげで現れない．）というのは，図4のように，6次以上の相互作用も量子補正によって生成されるからである．有効ポテンシャルの各項をもとの相互作用 λ で表すと，例えば，

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda + C_1\, \lambda^2 + C_2\, \lambda^3 + \cdots \tag{3}$$

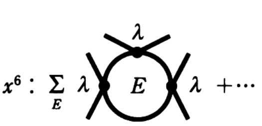


図4　6次の相互作用の量子補正による生成．

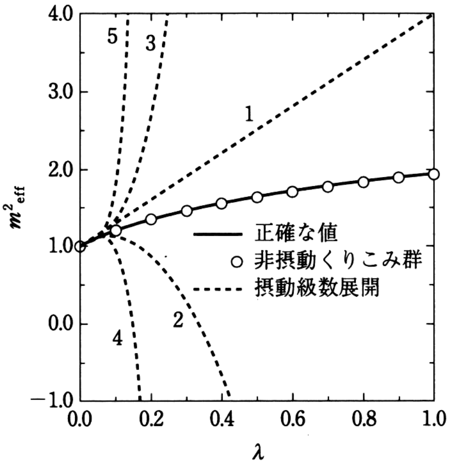


図5　摂動級数による結果（1次から5次まで）と非摂動くりこみ群による結果．

となり，λ による級数展開の形となる．

このように相互作用の強さによる級数展開で物理量を計算していく方法を，一般に摂動論と呼ぶ．これはまた，グラフ的な意味をこめてループ展開とも呼ばれる．こういう摂動級数展開は，相互作用が弱くて λ が十分に小さいときには意味があるが，相互作用が強い場合には全く使いものにならない．図5は，この系で m_{eff}^2 を計算したものである．この非常に簡単な系では，シュレディンガー方程式を解くという全く別の方法で量子補正を全て加えた正確な m_{eff}^2 の値がわかるので，それと比べる．摂動論による級数展開は，次数を上げて項の数を増やせば増やす程，結果が悪くなる，つまり全然収束していないことがよくわかる．一方，最初の近似で既に驚く程よく合っているのが，次に説明する非摂動くりこみ群による計算であり，級数展開を一切しないのがその特徴である．級数展開をするのは摂動論ばかりではない．実際，よく使われる非摂動的方法である $1/N$ 展開の方法や ϵ 展開の方法は，その展開という名前からも明らかなように，何らかの他のパラメータによる級数展開に基づいており，結局のところ収束しない級数に悩まされる．

4. 非摂動論的くりこみ群

いよいよ，量子補正の入った有効ポテンシャルをくりこみ群で求める方法を説明しよう．注目するのは各量子補正項に登場するループすなわち仮想状態の和（仮想粒子のエネルギーについての積分）である．まず，この積分の下限は 0 であり上限は ∞ である．上限が無限大であるために，しばしばこのループ積分は発散してしまう．これが，場の量子論が誕生直後に遭遇した最大の困難であった．つまり，式 (3) のように $\lambda_{\rm eff}$ を λ の関数として計算すると係数 C が発散してしまうわけである．これを回避するために，もともとのパラメータ λ の方に無限大を押しつけて，$\lambda_{\rm eff}$ を有限にしようというのが，朝永たちのくりこみ理論のアイデアであった[2]．つまり，有限な $\bar{\lambda}$ を用いて，とりあえず $\lambda = \bar{\lambda} - C_1\bar{\lambda}^2$ とおくと，$C_1\bar{\lambda}^2$ の項が相殺して，$\lambda_{\rm eff}$ は C_1 の発散から逃れられる．これを逐次的にやっていくのだが，これはいかにも泥縄で，朝永たちが満足しなかったこともうなずける．

非摂動くりこみ群の世界では，この積分の上限はとりあえず忘れておいて，その下限を E とする．このときに得られる有効ポテンシャルを $V(x, E)$ と書く．（これからは eff という添え字は省略する．）そして，

$$
\begin{aligned}
&V(x, E) \\
&= m^2(E)\, x^2 + \lambda(E)\, x^4 + \lambda_6(E)\, x^6 + \cdots
\end{aligned}
$$

というように，各係数をループ積分の下限 E の関数とする．この下限 E の導入をエネルギーの「切断」と呼ぶ．もちろん，この下限 E を 0 にしたものが正しく全ての量子補正が入った有効ポテンシャルである．

さて我々は，$E = 0$ のときの結果，つまり正しい下限まで全てのループ積分を実行した結果を一気に求めようとはしない．そうではなくて，E を変えたときの有効ポテンシャルの変化を考える．本質的に重要なことは，この変化は発散を含まず，具体的にかつ正確に評価することができる，ということである．この変化を表す式を非摂動くりこみ群方程式と呼ぶ[2]．

ループ積分の下限 E を少しだけ下げて $E - \delta E$ にしたときに，例えば $\lambda(E - \delta E)$ がどれくらい $\lambda(E)$ からずれるだろうか．新たにどれだけの量子補正が加わるかを見ればよい．以下では，式を簡単にするために，t というパラメータを導入して

$$
E(t) = e^{-t} E_0
$$

と定義し，$\lambda(E)$ 等を全て t の関数とみる．つまり，$t = 0$ で $E = E_0$ であり，t が進むにつれて E が下がっていく．

我々は，正確にいうと，微分

$$
\frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\lambda(t + \delta t) - \lambda(t)}{\delta t}
$$

を求めたい．$\lambda(t)$ には，エネルギー $E(t)$ までの仮想状態のループ積分が入っているはずだから，新たな量子補正は区間 $[t, t + \delta t]$ に対応したエネルギーを持つ仮想粒子のループ積分だけからくる．それをグラフで表すと図 6 のようになる．内部に飛んでいる仮想粒子は 2 重線で書かれているが，それは幅 δt の区間のエネルギーのもののみを足すことを示している．そして，各相互作用項は t のときの値を使うのである．そこでは，6 次の相互作用項も登場する．それは，t 以前（$E(t)$ 以上）の仮想粒子の量子効果によって既に生成された有効相互作用である．

図 6 の 1 行目の 1 ループの項は，ループ積分 $\displaystyle\int_t^{t+\delta t} dt$ のために，δt に比例している．すると，2 ループ以上の項は全て，δt の 2 次以上の寄与し

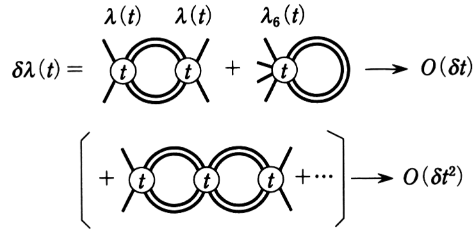


図 6　有効相互作用の変化分を与えるグラフ．2 重線は δt の区間の仮想粒子．

か与えないことになる．我々は微分に興味があるので，δt の 1 次の項だけを正確に評価すればよい．ということは結局，我々が求めたい微分を計算する処方は，「グラフは 1 ループまででよい，ただし 6 次以上の高次の相互作用項も使うこと」ということになる．すなわち，数係数は忘れて，

$$\frac{\partial\lambda(t)}{\partial t} = \lambda(t)^2 + \lambda_6(t). \tag{4}$$

ここでは 4 次相互作用の変化を考えたが，一般に任意の次数の相互作用の微分を計算するのに必要なグラフの数はいつでも有限個で何の級数展開の必要もない．ただし高次のものも含めて可能な相互作用は全て考慮せねばならない．この 2 つの性質が，図 3 のループ展開の場合との決定的で対照的な違いを与えている．

全ての次数の相互作用の変化がわかると，有効ポテンシャルの変化が記述される．有効ポテンシャルを一般的に

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\ x^{2n}$$

と書き，各次数の相互作用の係数 a_n を座標とする空間を考えよう．この空間の各点はある 1 つの a_n の組に対応し，1 つの有効ポテンシャル，あるいはある相互作用の総体を表している．このような空間を理論空間という．すると，E を下げていくときの変化は，この理論空間の中で点が動いていくこととして捉えられ，1 つの軌跡を与える．この軌跡を理論の「流れ」と呼ぶ．出発点が異なると，別の 1 つの流れができる．理論空間全体にわたって，流れの流線がおおいつくす（図 11）．

さて，この非摂動くりこみ群方程式は微分方程式であるが，それを解くことによって無限個のグラフの足し上げが行われる．このことを，4 次の相互作用を例にとって簡単に見よう．いま，図 6 の最初のグラフだけを考えて，逐次的に微分方程式を解いて行く．最初に，$t = 0$ での有効相互作用を初期条件として，$t = \epsilon$ での有効相互作用を書き下すと，図 7 のようになる．更に，$t = 2\epsilon$ での有効相互作用を書くと，図 8 の 1 行目のようになるが，それをもとの $t = 0$ での有効相互作用で

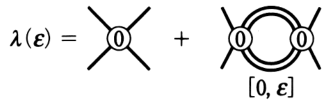


図 7　微分方程式を 1 ステップ解く．2 重線は微小区間 $[0, \epsilon]$ の積分．

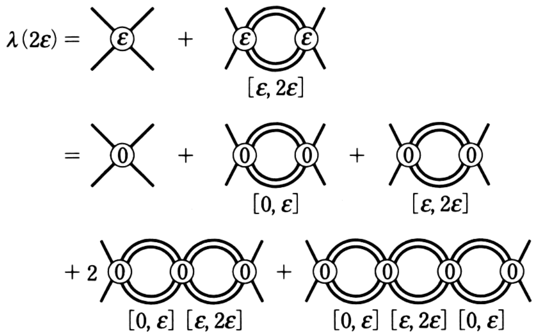


図 8　微分方程式を 2 ステップ解く．

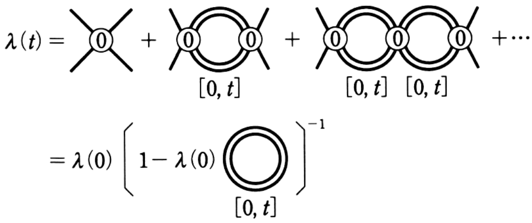


図 9　微分方程式の解．2 重線は全区間 $[0, t]$ の積分．

表しなおすと，自動的に 2 ループの寄与が足されていることがわかる．

t を進めるきざみ ϵ を小さくしながらこれを無限に繰り返していくことが，微分方程式を解くことに他ならない．その場合に得られる t での有効相互作用が図 9 の無限和（無限に続く鎖型グラフ）で与えられることは，ゆっくり考えれば想像できるだろう．想像しにくければ，図 9 の 2 行目にある無限級数の和の形を逆に t で微分してみれば，この表式が正しく (4) の解になっていることが直接わかる．2 次項の変化がもたらす影響をきちんと考慮に入れ，6 次項からの寄与（図 6 の第 2 項）も入れると，鎖が分岐して色々な方向に伸びたグラフが加わり，更にもっと複雑なループのグラフも入る．このようにして，全ての可能な無限個のグラフが微分方程式の解として自動的に足し上げ

られていく．

5. 近似方法

理論空間での流れをもっと直接的に表現することもできる．例えば有効ポテンシャルの変化は，

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = 4V(x,t) - x\frac{\partial V}{\partial x} + \log\left(1 + \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\right) \quad (5)$$

というような偏微分方程式の形にまとまって書ける．ただし，右辺1行目の2つの項は，次元のある物理量を全て $E(t)$ でスケールしたことによる項である．この偏微分方程式は，図6を全ての次数の相互作用にわたって書き下した無限個の連立常微分方程式と同等である．

この稿では簡単のために微分の入った相互作用項を扱っていないが，そういうものも入れると，可能な理論の全体から1つの相互作用の組を選ぶことは，1つの汎関数（連続無限個の独立変数を持つ関数）を指定することに対応する．そして，非摂動くりこみ群方程式は，連続無限個の変数に対する偏微分方程式，すなわち，汎関数微分方程式となり，それを正確に書き下すことができる．正確に書き下せても，どうせ連続無限次元偏微分方程式を解くことなど全くできないので，むしろ本質的な問題は，その解を系統的に収束する形で近似することができるか否かということである．

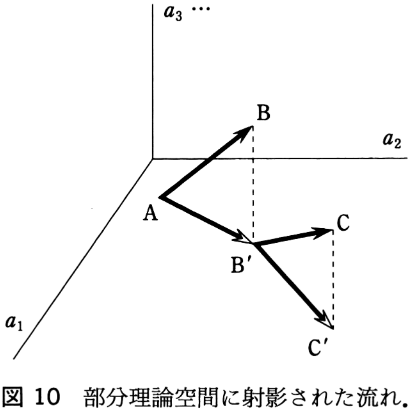


図 10　部分理論空間に射影された流れ．

非摂動くりこみ群での近似は，理論空間を適当な部分理論空間に制限し，その上に射影された流れを見ることである．部分空間を順次拡大していくことによって近似が系統的に改善され，真の解に収束していくと期待される．図10で，まず a_1, a_2 の2次元の空間を部分空間としよう．この上のAから出発する流れは，必然的にこの部分空間の外のBに飛び出していくが，それをこの空間の上に射影してB′に引き戻す．これを繰り返して得られる流れ，A→B′→C′が射影された流れである．

例として3次元時空のスカラー場の理論をとる．理論空間の流れは，図11のように得られる．この流れは大きく2つの相に分かれていることがすぐに見てとれる．それは，それぞれ a_1 が正の方に行くか，負の方に行くか，に対応している．この係数 a_1 は2次の質量項 m^2 なので，図1にあるように，負の方は自発的に対称性の破れた相に対応しており，そこではスカラー場の真空期待値が発生する．量子補正のために，m^2 $(= a_1)$ の臨界点は0から負の方にずれていることがわかる．

有効ポテンシャルの項を x の何次まで入れるかによって部分理論空間の次元が決まる．図12は，x^2 から x^6 まで入れた3次元の部分空間からはじめて，x^2 から x^{20} まで入れた10次元部分空間まで順次部分空間の次元を増やしていったときに，臨界指数という物理量をそれぞれの部分空間内の

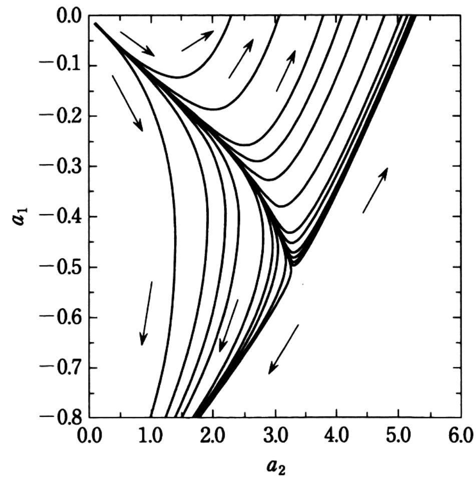


図 11　理論空間の中の流れ．

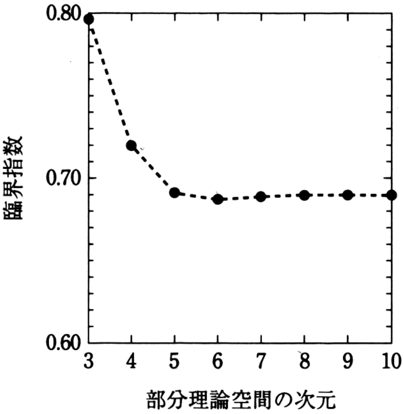


図 12　部分理論空間の拡大による系統的な近似の改善.

流れの構造から計算し，その結果がどうなっていくかを見たものである．期待通りに結果は収束しており，無限次元の理論空間での結果が得られたものと考えられる．このような収束性は，部分空間の拡大という近似の改善方法が，ちょうど計算機シミュレーションでの格子サイズの拡大に対応していることを考えれば，極めて自然なことである．しかも十分に少ない次元の部分空間で十分良い結果が得られている．このように，非摂動くりこみ群とその系統的な部分理論空間拡大による近似は，発散級数とは無縁な安定した量子補正の計算方法を与えている[5]．

6. カイラル対称性の自発的破れ

電子やクォークなどのスピン 1/2 の粒子はフェルミ粒子と呼ばれ，スピンの自由度に対応して，右巻き状態（R）と左巻き状態（L）がある．素粒子の統一ゲージ理論が持つカイラル対称性は，このRとLがそれぞれ混ざらないことを要求する．実際，ゲージ理論の基本相互作用 g では（図 13），RとLがそれぞれ独立にゲージ粒子を放出したり吸収したりするので，RとLは混ざらない．一方，フェルミ粒子の質量とは，このRがLに，あるいはLがRになるという相互作用（図 14 の左）に

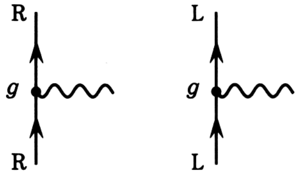


図 13　ゲージ相互作用.

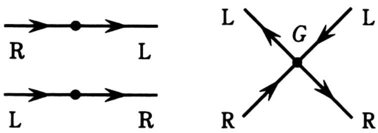


図 14　フェルミオンの質量と 4 フェルミ相互作用.

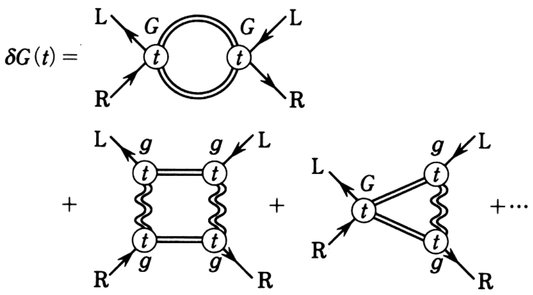


図 15　4 フェルミ相互作用の非摂動くりこみ群方程式.

他ならない．したがって，現実の電子やクォークが質量を持っているということは，このカイラル対称性が自発的に破れていることを意味している．

さて，このゲージ理論を非摂動くりこみ群で扱うために，まず理論空間を用意する．理論空間にはカイラル対称性を満たす項しか入れられない．2 次の項（質量項）が禁止されてしまうので，最初の項は 4 つのフェルミ粒子の相互作用の項（図 14 の右）である．RとLをそれぞれ 2 つずつ結合できるので，カイラル対称性は維持できる．この 4 フェルミ相互作用 G に対する非摂動くりこみ群方程式を書き下すと図 15 のようになる．図 6 の場合と比べると，カイラル対称性のおかげでフェルミ粒子が 6 つある相互作用は作れないのでその寄与はないが，ゲージ相互作用による項が加わることになる．

この方程式がどういう性質を持っているかを簡

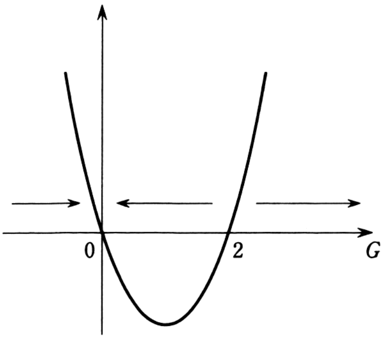


図 16　4 フェルミ相互作用の流れ.

単に見るために，図 15 の第 1 項のみをとると，

$$\frac{\partial G(t)}{\partial t} = -2G(t) + G(t)^2 \qquad (6)$$

となる．右辺の $-2G$ は，4 フェルミ相互作用のエネルギー次元が -2 であることからでてくる量子補正とは独立な項である．この式の右辺は図 16 のような 2 次関数になっている．この関数が正のところでは G は増大し，負のところでは G は減少する．したがって，臨界点 $G=2$ を境にして流れは 2 つに行き別れることになる．つまり，理論空間は 2 つの相を持つ．

左側の部分（$G<2$）では，流れは $G=0$ の点に向かう．つまり，4 フェルミ相互作用はどんどん弱くなってしまって，理論には何ら非自明なことは起こらない．右側（$G>2$）では，4 フェルミ相互作用はどんどん強くなる．実際に何が起こるかを見るには詳しい解析が必要だが[4,6]，紙数も尽きたのでここでは結果だけを述べよう．R と L の 2 つのフェルミオンの積のオペレータを σ とし，この σ に対する有効ポテンシャル $V(\sigma)$ を計算する．すると，この 2 つの相ではそれぞれ図 17 のように有効ポテンシャルが得られ，G が大きくなる相では σ が真空期待値を持つこと，現実の強い相互作用のゲージ理論（QCD）はこの相にあること，がわかる．この真空期待値によって，例えば図 18 のように，4 フェルミ相互作用を通じた有効質量ともいうべきものが生じる．それはグラフでいえば，図にあるような無限個のグラフを足し上げて初めて生じるものである．これこそが，ゲージ理論でのカイラル対称性の自発的破れによって

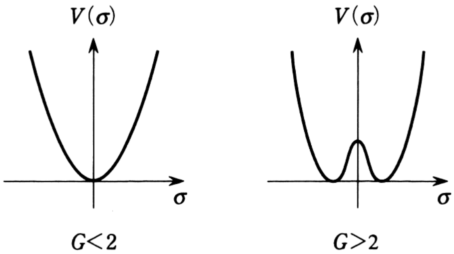


図 17　有効ポテンシャル.

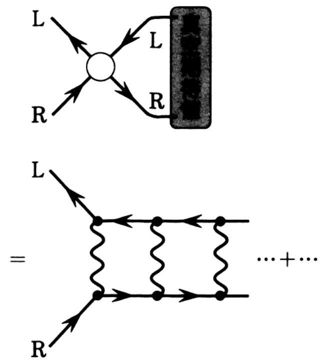


図 18　フェルミオンの力学的質量.

生じる力学的質量と呼ばれるものであり，素粒子の世界では例えば陽子や中性子の質量を説明するものである．

7. まとめ

非摂動くりこみ群では，高次の相互作用までを同時に考慮に入れながら相互作用の変化分を評価した（図 6）．そのおかげで必要なグラフの数を有限個に押さえることができて，級数展開の必要がなくなったわけである．もちろん，同時に考えるべき可能な高次相互作用の種類は無限にあるから，この「種類の無限大」が支払った代償である．しかしこの代償の無限大は，発散級数のような困難に遭遇することなく，部分理論空間の拡大という系統的な近似方法によって順次とりいれていくことができる．まさにこの点に，非摂動くりこみ群の持つ本質的な優位性がある．

ウィルソンが非摂動くりこみ群を世に出してか

ら 30 年近く経過したが，それによる量子補正の評価，素粒子論，特にゲージ理論での適用にはまだまだ未開拓の領域が残されている．特に，コンピュータやソフトウェアの急速な発達によって，何か革命的な進歩が近い将来に可能になるのでは，と私は夢みている．

参考文献

1) K.G. Wilson: *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 773.
2) 青木健一：『場の理論』，数理科学，**312** (1989) 34, 『場の物理と数理』，別冊数理科学，(1991) 118.
3) 青木健一：『くりこみとくりこみ群の意味』，素粒子論研究，**80-4** (1990) D51.
4) 寺尾治彦：『非摂動繰り込み群の最近の話題』，素粒子論研究，**94–3** (1996) C81.
5) Ken-Ichi Aoki, Keiichi Morikawa, Wataru Souma, Jun-Ichi Sumi and Haruhiko Terao, *Prog. Theor. Phys.* **95** (1996) 409 (hep–ph/9612458).
6) Ken-Ichi Aoki, Keiichi Morikawa, Jun-Ichi Sumi, Haruhiko Terao and Masashi Tomoyose, *Prog. Theor. Phys.* **97–3** (1997) 479 (hep-ph/9612459).
7) 最近の講義録として Ken-Ichi Aoki: *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **131** (1998) 129. Lecture given at 1997 Yukawa International Seminar "Non-Perturbative QCD——Structure of the QCD Vacuum——".
同じ巻の Tim R. Morris, D.-V. Jungnickel and C. Wetterich 他の Lectures.

（あおき・けんいち，金沢大学・理学部）

IV. くりこみ群

場の量子論とくりこみ理論入門

東島 清

1. 場の量子論入門

場の量子論は相対性理論と量子論を融合したもので，現在までに人類が到達した最高の力学形式である．この節では，高校程度の物理の知識を持っている人を対象に，場の量子論がどういうものかある程度理解できるように説明する．

1.1 場と相対性理論

物理の教科書を見ると，力には遠隔作用と近接作用の2つの考え方があると書いてある．遠隔作用の考え方では，互いに遠く離れた2つの物体が，瞬時に直接反発したり引き合ったりすると考える．近接作用の考え方では，物体のまわりに重力場・電場（電界）・磁場（磁界）などの場というものができ，その場が媒介となって2つの物体の間に力が働くと考える．

例えば電荷 Q_1 と電荷 Q_2 を距離 r 隔てて置いたときに，Q_2 が受けるクーロン力は電場 E を用いるか否かにより

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (\text{遠隔作用}), \tag{1}$$

$$F = Q_2 E, \quad E = k\frac{Q_1}{r^2} \quad (\text{近接作用}) \tag{2}$$

のように表される．明らかにどちらの考え方でも力が説明できるのだから，遠隔作用と言っても近接作用と言っても大差はない．このように，場が時間に依存しないような静的な場合には，どちらを用いるかは単に好みの問題である．「磁場が変化すると電場が生じる」というファラデーの法則の説明には，場の概念を用いると便利である．だが，そもそも磁場は電流によってつくられるのだから，この法則は電流の変化が電荷に力を及ぼすということを言っているだけで，場の実在を示しているわけではない．場の概念がどうしても必要になるのは，マクスウェルによる電磁波の存在の予言以後である．マクスウェルは，いわゆるマクスウェル方程式と呼ばれる電磁気学の基本方程式を提唱し，それを解いて電磁波の存在を予言した．磁場の変化が電場をつくり，その電場の変化が今度は磁場をつくるというふうに交互に入れ替わりながら，電磁場が光速 c で時間・空間を波となって伝わっていく現象を電磁波と呼ぶ．電磁波は波としてエネルギーや運動量を持ち，場の固有の運動により生じる．電磁波の存在こそが，場が自身の固有の力学的自由度を持って実在することを示しており，電気・磁気の力が近接作用であることの証なのである．

マクスウェル方程式によれば光速 c は定数である．一方，ニュートンの運動法則によれば，走っている人から見た光速と，止まっている人から見た光速は違うはずであって定数ではありえない．その矛盾を解くために，アインシュタインはニュートンの法則を捨て相対性理論を提唱した．相対性理論は「どの人にとっても光速は一定であり，いかなる信号も光速より速くは伝わらない」ことを主

張する．だが，遠隔作用の考えでは，遠く隔たった2つの物体の間に瞬間的に力が働く．したがって，相対性理論のこの主張は遠隔作用の考えと真っ向から矛盾してしまう．すなわち，相対性理論を認めると，遠隔作用の概念は明白に否定され，すべての力は場によって媒介される近接作用でなければならないことになる．

空間の各点各点にはその空間の点の物理的状態を表す場が存在する．まわりに置かれた物体の電荷・質量などにより場の状態が変化するため，その点に別の物体を持ってくると，物体は場の状態に応じて様々な力を受ける．まわりの物体が時間的に変化すると，それに応じて場も変化し，その変化が隣の点の場を変化させ次々に変化が伝わっていく．こうして，場自身の固有の運動である波は光速以下の速度で時間・空間を伝わっていく．**相対性理論では，力も波も1つの物理的実在たる場の2つの側面であり，静的な場は力を表し，時間的に変化する場は波を表している．**

ニュートンの運動法則は物体の速度が光速に比べて遅いときにしか成り立たない．光は光速で進むのでニュートンの法則に従わないことはすぐにわかる．質量を持つ粒子は一般に光速以下の速さで走っているため，ニュートンの法則との不一致はあまりめだたない．しかし，速度が光速に近い場合には，もはやニュートンの法則は成り立たず，質量を持つ粒子に対しても，相対性理論を用いる必要がある．

1.2 粒子と波の二重性 —— 量子論

高校の物理で，光や電子の不思議な振る舞いについて習う．水たまりの表面に浮いた油の薄膜や，CDの表面は虹のように色づいて見える．光は波であって波が干渉すると考えれば，これらの現象は説明できる．一方，金属に光をあてたときに電子が飛び出してくる，いわゆる光電効果において，光の強度を変えずに光の振動数を小さくしてゆくと電子が出てこなくなる．この現象を説明するためには，光が粒子からなっていて，振動数 ν の光の粒子（光子）は1個につきエネルギー

$$E = h\nu \tag{3}$$

を運ぶと考えればよい（h はプランク定数）．金属に光をあてると，1個の光子とぶつかった電子はエネルギー (3) をもらい，$E_{\mathrm{el}} = h\nu - W$ だけのエネルギーを持って，金属から飛び出してくる（W は電子が金属から飛び出すのに必要なエネルギー）．光の振動数があまり小さいと，電子が光子からもらうエネルギー $h\nu$ が，飛び出すのに必要なエネルギーよりも少なくなってしまって，出てこられなくなる．次に，光の振動数を一定にしたまま，光の強度（明るさ）を弱くしてゆくと，飛び出してくる電子の数は減るけれども，出てきた電子の持つエネルギーは変化しない．このことから，光の強度は個々の光子が持っているエネルギーとは無関係で，むしろ光子の個数に比例していると考えられる．普通の粒子はエネルギーと運動量を持つ．光もエネルギーと運動量を持つので，光子も運動量を持つと考えられる．波長 λ の光子は運動量

$$|\vec{p}| = \frac{h}{\lambda} \tag{4}$$

を持つと考える．電子に光子を衝突させるいわゆるコンプトン散乱の実験により，エネルギーだけでなく運動量も保存されることが確かめられた．エネルギー E と運動量 p が粒子としての性質を特徴づけるのに対し，振動数 ν と波長 λ とは光の波としての性質を特徴づける．振動数，波長と波の速度の間には関係式 $\nu = c/\lambda$ が成り立っている．この関係式を粒子の言葉で表すと，光子のエネルギーと運動量の相対論的な関係式

$$\frac{1}{c}E = |\vec{p}| \tag{5}$$

が得られる．

アインシュタインによって提唱された光子説では，光は波としての性質と同時に粒子としての性質も持つ．後年，ド・ブローイは，光子だけではなく，電子も粒子性と同時に波としての性質を持つと考えた．まもなく，電子波の干渉実験が行われ，電子の波動性が確かめられた．電磁波がマクスウェル方程式に従うように，電子波の従う方程

式がシュレディンガーにより発見された．シュレディンガーの方程式は電子の速度が遅いときにしか成り立たない近似式であったが，相対論的に正しい方程式はのちにディラックによって導かれた．

量子論では光子や電子だけでなく，すべての素粒子は粒子性と波動性の両方の側面を持っている．素粒子でなくても，素粒子が結びついてできている原子核や原子なども，粒子性と波動性を持っている．ミクロの世界ではすべての粒子が二重性を持っている．古典的な粒子は常に確定した位置と運動量を持つ．だが，量子論における粒子像では，粒子の位置と運動量を両方とも確定することはできない．波動を小さな部分に分けて考えると，古典的な波動の持っているエネルギーや運動量は，いくらでも細かく分割することができる．量子論における波動像では，波の持っているエネルギーや運動量は一定以上細かく分割することはできない．分割できる最小のエネルギー単位が，量子論的な粒子の持っているエネルギーである．ミクロの世界では，粒子と波が統一された量子論的粒子像が成り立っている．粒子像のエネルギー E，運動量 p は波動像の振動数 ν，波長 λ と，光子と同じ関係式 (3), (4) で結びついている．光子と違って，質量を持つ粒子の場合には，エネルギーと運動量は相対論的な関係式

$$\frac{1}{c^2}E^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2 \tag{6}$$

を満たしている．

1.3 場の量子論 —— 力・波・粒子の統一

相対論では，力と波は空間の各点で定義される場の持つ 2 つの側面であった．量子論では，波と粒子は統一されて量子論的な粒子像をつくっている．相対論と量子論を組み合わせた相対論的量子論では，力と波と粒子が統一された量子論的な場の概念に到達する．量子論的な電磁場は，波の強度が強いときには古典的な波として空間を伝わっていくが，波の強度が弱くなると粒子的な性質が目立つようになる．また，電荷を持った物体間に介在して力を及ぼす．相対論的量子論は場を基本的なものと見なして，場に量子力学を適用したものである．このため，相対論的量子論は場の量子論と呼ばれている．**場の量子論では，力と波と粒子は三位一体であるということができよう．**

場の量子論ではすべての素粒子は場に対応している．また，すべての力には場が対応している．これまで説明してきたように，場は力・波・粒子を統一した概念である．したがって，力があるところには，粒子が存在する．この考えを核力に適用して，中間子の存在を予言したのが，湯川秀樹である．原子核はいくつかの陽子と中性子が集まってできている．陽子は正の電気を持っているので，クーロン力で反発しあう．その反発力に打ち勝って原子核を 1 つにまとめておくためには，非常に強い力が必要になる．これを核力と呼ぶが，この核力はクーロン力と違って原子核の大きさ程度の距離離れると働かなくなる．このように力が有限の距離 λ_c までしか届かないとき，λ_c のことを力の到達距離という．一方，場の量子論でも場の粒子が質量 m を持つときに，この粒子が媒介して起きる力の到達距離は有限になって

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}, \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right) \tag{7}$$

で与えられる．粒子の質量 m から得られる長さの次元を持つ λ_c は粒子のコンプトン波長と呼ばれる．湯川は，当時知られていた核力の到達距離から核力を媒介する π 中間子の質量を予言することができた．

場の量子論ではすべての力は場=粒子によって媒介される．電磁力は光子によって媒介される．核力は π 中間子によって媒介される．陽子・中性子や π 中間子などはクォークと呼ばれる素粒子がいくつか集まってできている．クォークを結びつける力の強い相互作用はグルーオンと呼ばれる粒子によって媒介される．中性子のベータ崩壊をひき起こす力は到達距離が非常に短く，弱い相互作用と呼ばれるが，この力もまた W–ボソンや Z–ボソンと呼ばれる粒子によって媒介される．重力もまた重力子と呼ばれる粒子によって媒介されると考えられているが，重力子はまだ発見されてい

ない．

光子，レプトン（電子やニュートリノ等の仲間），クォーク，グルーオン，W–ボソン，Z–ボソン，重力子などの多くの素粒子に対応して，空間の各点にはいろいろな場が共存していることになる．これらの場の振動が，次々に空間の各点を波として伝わっていくとき，場は波としてあるいは粒子として見えることになる．波の強度は粒子の個数に対応しているので，波が強ければほぼ波として見え，強度が弱ければ粒子としての特徴がより強くでてくる．波の強弱は，粒子の個数の増減に対応する．場の量子論は場を量子力学の対象と考え，場の時間的空間的変化を記述する．したがって，場の量子論では必然的に粒子の生成・消滅が起こる．空間の各点に幾種類もの場が共存しているわけだから，2 つの場の波が重なるときにぶつかり合って，別の種類の場の波が生ずることもある．波=粒子という図式を用いると，この現象は 2 種類の素粒子が衝突して別の素粒子が生成されることに対応する．この現象を場の相互作用と呼ぶ．

2. くりこみ理論入門

この節では場の量子論におけるくりこみ理論の解説を行う．場の量子論では，空間の各点に存在する場が力学変数となる．空間の点の数は無限にあるので，力学変数の数も無限個ある．したがって，場の量子論は無限自由度の量子力学である．無限個の自由度は相互作用により複雑にからみあう．無限個の自由度に関する和から，場の理論特有の発散が生じる．この発散を処理する手法がくりこみ理論と呼ばれる．

2.1 相対論的な波の方程式

電磁波（光）に対する相対論的な波動方程式を求めてみよう．話を簡単にするために，単位ベクトル $\vec{n}$ の方向に進む振動数 ν，波長 λ の平面波を考える．時刻 t，位置 $\vec{r}=(x,y,z)$ における場（電場または磁場）を $\phi(\vec{r},t)$ で表すことにすると，この平面波は

$$\phi(\vec{r},t)=A\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \tag{8}$$

と書くことができる．ここで

$$\vec{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}, \tag{9}$$

$$\omega=2\pi\nu \tag{10}$$

は，それぞれ波の波数ベクトルおよび角振動数と呼ばれる量である．光の場合には $c=\nu\lambda$ が光速なので，$\vec{k}$ と ω は

$$\vec{k}^2-\frac{1}{c^2}\omega^2=0 \tag{11}$$

を満たす．平面波の式 (8) を，t と x,y,z で 2 回ずつ微分して，(11) を用いると，平面波の満たす波動方程式を導くことができる．

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\vec{r},t)=0. \tag{12}$$

ここでラプラシアンは

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

で定義される．波動方程式を導くために $\vec{n}$ 方向に進む特殊な平面波の式 (8) を用いたが，波動方程式 (12) はもっと一般の解を含んでいることは言うまでもない．

次に，π 中間子のように質量を持つ粒子の場の従う波動方程式を導こう．電磁場の波動方程式を導くときには，光子の質量が零なので，(11) を用いた．質量を持つ粒子のエネルギーと運動量の関係は (6) で与えられる．粒子と波の対応関係 (3), (4) を，質量を持つ粒子のエネルギーと運動量の関係式 (6) に代入すると

$$\frac{1}{c^2}\omega^2-\vec{k}^2=\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \tag{13}$$

という波の振動数と波数ベクトルの関係が導かれる．この関係式が波動方程式の解として得られるはずである．実際，平面波の式 (8) を，t と x,y,z で 2 回ずつ微分して (13) を用いると，質量を持つ粒子に対する次の波動方程式を満たしていることがわかる．

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\phi(\vec{r},t)=0. \tag{14}$$

ここで，質量に比例する定数項は丁度コンプトン波長 (7) の逆数になっている．

4 次元ベクトル (x, y, z, ct) の長さを変えない変換をローレンツ変換*1) と呼ぶが，この波動方程式は，ローレンツ変換に不変なスカラー場を記述し，クライン・ゴルドン方程式と呼ばれている．ローレンツ変換に対してベクトルとして変換される場（電磁場など）や，スピノールと呼ばれる変換性を持つ場（電子など）の場合には，場が幾つかの成分を持ちスピンという新しい自由度が現れるために，波動方程式はもう少し複雑になる．

2.2 自由場の量子論

相互作用のないときの場を自由場という．この節では，自由場の量子論を考える．場を力学変数と見なして場の運動を調べようとすると，力学変数が空間の各点各点にあるため，連続無限個の変数を扱うことになる．それではあまりに扱いにくいので，場を一辺の長さが L の箱の中に閉じこめ，箱の両端では場が周期的であるという境界条件を課すことにする．後で $L \to \infty$ の極限をとるので，この境界条件は重要ではない*2)．こうすれば，x, y, z の各軸方向の波の波長が（したがって波数ベクトルが）境界条件を満たすものだけに制限されるので，力学変数の数が可附番無限個になる．長さ L の周期で周期的な関数はフーリエ級数に展開できるので，

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} q_{\vec{k}}(t) \tag{15}$$

の形に表すことができる．ここで，許される波数ベクトルの値は n_x, n_y, n_z を整数として

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \tag{16}$$

に限られる．$\phi(\vec{r}, t)$ を実数とすれば，$q^*_{\vec{k}} = q_{-\vec{k}}$ の関係がある．場のフーリエ展開 (15) を波動方程式 (14) に代入すると

$$\frac{d^2}{dt^2} q_{\vec{k}} = -\omega^2_{\vec{k}} q_{\vec{k}} \tag{17}$$

という式が得られる．ここで，$\omega_{\vec{k}}$ は (13) の解を表す．

$$\omega_{\vec{k}} = c\sqrt{\vec{k}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}. \tag{18}$$

$q_{\vec{k}}$ の満たす式 (17) は，丁度，調和振動子の運動方程式になっている．したがって，力学的には，**自由場は無限個の調和振動子の集まりと同等である**ことがわかった．

量子論では力学変数は演算子として扱われる．中でも，考えている物理系の時間的発展を支配するハミルトニアンと呼ばれる量が重要な役割を果たす．ハミルトニアンはエネルギーを演算子で表したものであり，普通 H で表される．自由場は無限個の調和振動子の集まりと同等なので，自由場のハミルトニアンは，調和振動子のハミルトニアンを無限個加えたものになる．すなわち，

$$H = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{2} p^*_{\vec{k}} p_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}}{}^2 q^*_{\vec{k}} q_{\vec{k}} \right). \tag{19}$$

ここで $p^*_{\vec{k}} = \dot{q}_{\vec{k}}$ および $p_{\vec{k}} = \dot{q}^*_{\vec{k}}$ は正準運動量と呼ばれる演算子である*3)．

ここで調和振動子の量子論をまとめておこう．調和振動子の座標を $q(t)$ とすると，ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2. \tag{20}$$

量子論では座標 q および運動量 $p = \dot{q}$ は非可換な演算子として扱われる．そのため位置 q と運動量 p がともに確定した値を持つことは許されず，位置の不確定さ Δq と運動量の不確定さ Δp は，ハイゼンベルクの不確定性関係

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{21}$$

を満たさなければならない．

振動子の位置のエネルギー $\frac{1}{2}\omega^2 q^2$ は原点 $q = 0$ で最小となるので，ニュートンの力学では，振動子が原点に静止した状態 $p = 0, q = 0$ が一番エネルギーが小さい．量子論の基底状態の性質は不確定性関係を用いて調べることができる．基底状態において q と p が平均値 0 のまわりに，それぞ

*1) $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ を変えない 1 次変換．

*2) もちろん，実際に金属の箱の中に電磁場を閉じこめる場合などには，正しい境界条件を用いる必要がある．

*3) ここで扱う調和振動子は複素数で書いてある．実数部分と虚数部分に分けて書くと，普通の実数の調和振動子になる．

れ $\Delta q, \Delta p$ 程度揺らいでいるときのエネルギーを E とすると

$$E = \frac{1}{2}\left((\Delta p)^2 + \omega^2 (\Delta q)^2\right) \geq \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (22)$$

等号は $\Delta p = \omega \Delta q$ のときに成り立つ．したがって，量子論における調和振動子の基底状態のエネルギーは

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (23)$$

となり，基底状態における q と p の揺らぎが

$$(\Delta q)^2 = \frac{\hbar}{2\omega}, \quad (\Delta p)^2 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (24)$$

程度であることがわかる．これを零点振動と呼ぶ．

自由場のハミルトニアン (19) は無限個の調和振動子の集まりなので，一番エネルギーの低い真空状態は，すべての調和振動子が基底状態にある場合である．したがって，真空のエネルギーは (23) より

$$E_{\text{vac}} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2}\hbar\omega_{\vec{k}} \quad (25)$$

となるが，$\vec{k}$ についての和は明らかに発散する．普通は真空のエネルギーの絶対値は，重力以外の相互作用では観測できないので，真空を基準にしてエネルギーを定義することにして，この無限大の定数を差し引いてしまう*4)．場の量子論における真空は，何もない空っぽの状態ではなく，各振動子が零点振動をしていることに対応して，場 (15) は激しく揺らいでいる．実際，場の揺らぎの振幅は (24) より

$$\int d^3\vec{r}\ (\Delta\phi(\vec{x},t))^2 = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}} \quad (26)$$

となるが，これも明らかに発散している．

2.3 相互作用とくりこみ

自由場のハミルトニアン (19) は，場のフーリエ級数展開 (15) の逆変換を代入すれば

$$H = \int \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + c^2(\nabla\phi)^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\phi^2\right] d^3\vec{r} \quad (27)$$

と書くことができる．ハミルトニアンが 2 次式のときには，波動方程式が線形になる．波動方程式に 2 次以上の非線形項を入れると，もはや重ね合わせの原理が成り立たないので，波が相互作用することになる．ここでは，$\phi \to -\phi$ の対称性を考慮して，ハミルトニアンに 4 次の項を付け加えてみる．

$$H_{\text{int}} = \int \frac{g}{4!}\phi^4\ d^3\vec{r}. \quad (28)$$

エネルギーが正定符号になるためには，相互作用の強さを表す結合定数 g は正でなければならない．g は古典的には，2 つの波がやってきて波が重なった所でぶつかり，また別の 2 つの波が出て行く，波の散乱に対応している．量子論では 2 粒子の散乱振幅を表す．

場の量子論では，非常にエネルギーの高い粒子から非常にエネルギーの低い粒子まで 1 つのハミルトニアンで記述されている．しかし，我々の持っている実験装置で創ったり観測したりできる粒子のエネルギーは装置の制約上一定の範囲に限られている．我々が創ったり測ったりできる粒子のエネルギーを低エネルギーと呼ぼう．実験に使う粒子のエネルギーがたとえ小さくても，ハミルトニアンにはそれより遥かに高いエネルギーの粒子の項が入っている．それは，高エネルギーの粒子・反粒子が，真空の絶え間ない揺らぎの中で，できたり消えたりしているさまを記述している．そんな我々に関係のない効果を消し去って，我々に関係のある粒子だけを含むような，有効ハミルトニアンがあれば便利であろう．高エネルギーの粒子から見れば，我々が創ったり観たりする粒子は運動量が非常に小さいと考えて，我々に興味のある粒子の運動量をゼロとおいてみる．極端に簡単化して，低エネルギー粒子の散乱・衝突などを記述する有効ハミルトニアンを求めるわけである．

非常にエネルギーの低い粒子の散乱に興味があるので，場 $\phi(\vec{r},t)$ を定数部分と空間的に振動している波とに分けて考える．すなわち，フーリエ級数展開 (15) において，$\vec{k}=0$ の部分を φ，それ以外の部分を ϕ' と表すことにする．

*4) 重力まで考えて，この引き算をどのように正当化するのか，私にはわからない．

$$\phi(\vec{r},t) = \varphi + \phi'(\vec{r},t). \tag{29}$$

ただし，$\phi'(\vec{r},t)$ は定数部分を含まないとする．

$$\int \phi'(\vec{x},t) d^3\vec{r} = 0. \tag{30}$$

低エネルギーの散乱振幅を求めるだけならば，ϕ' を全く捨ててしまえば良さそうだが，古典的な波が全くない量子論の真空においても，真空の場の揺らぎは絶え間なく続いている．そこで，真空における ϕ' の揺らぎの効果だけは取り入れる必要がある．場の分離 (29) をハミルトニアンに代入すると，

$$H = H_0(\varphi) + H_2(\varphi,\phi') + H_3(\varphi,\phi') \tag{31}$$

と分けられる．ここで，$H_0(\varphi)$ は ϕ' を含まない項，$H_2(\varphi,\phi')$ は ϕ' の 2 次の部分，$H_3(\varphi,\phi')$ は ϕ' の 3 次以上の項を表す．ϕ' の 1 次の項は (30) を使うと消えてしまう．

低エネルギーにおける φ の相互作用に対する最低次の量子補正を取り入れるために，$H_2(\varphi,\phi')$ の真空揺らぎのエネルギーを求める．ϕ' の量子揺らぎ以外の寄与を表す H_3 は単に無視してしまう[*5)]．

$$H_2(\varphi,\phi') = \int \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi'}{\partial t}\right)^2 + (\nabla\phi')^2 + M^2(\varphi)\phi'^2\right] d^3\vec{r}. \tag{32}$$

ここで，

$$M^2(\varphi) = m^2 + \frac{g}{2}\varphi^2 \tag{33}$$

は，φ に依存する ϕ' の質量を表す．真空の揺らぎのエネルギーは (25) で与えられているので，m^2 を $M^2(\varphi)$ で置き換えればよい．

$$E_{\text{vac}}(\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\sqrt{\vec{k}^2 + M^2(\varphi)}. \tag{34}$$

$\vec{k}$ に関する和は L が大きいときには積分で置き換えられる．

$$\sum_{\vec{k}} \longrightarrow L^3 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}.$$

ただし，(34) の積分は k が大きいところで発散する（紫外の発散）ので積分を $|\vec{k}| \leq \Lambda$ に制限しておいて後で $\Lambda \to \infty$ の極限を考える．この積分は初等的に実行できて

$$\begin{aligned}&\frac{L^3}{4\pi^2}\int_0^\Lambda k^2\sqrt{k^2+M^2}dk \\ &= \frac{L^3}{32\pi^2}\{2\Lambda(\Lambda^2+M^2)^{\frac{3}{2}} - M^2\Lambda(\Lambda^2+M^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - M^4\log(\Lambda+\sqrt{\Lambda^2+M^2}) + M^4\log M\}.\end{aligned}$$

これに

$$H_0(\varphi) = \int\left\{\frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{g}{24}\varphi^4\right\} d^3\vec{r} \tag{35}$$

を加えたものが，低エネルギーの散乱を記述する有効相互作用となる．

$$V_{\text{eff}}(\varphi) = \frac{1}{L^3}\{H_0(\varphi) + E_{\text{vac}}(\varphi)\}. \tag{36}$$

そこで，φ に依存しない発散する定数は除き，$\Lambda \to \infty$ の極限で零にならない項だけを残すと $(\Lambda' = 2e^{-1/4}\Lambda)$

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}(\varphi) &= \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{g\Lambda^2}{16\pi^2}\right)\varphi^2 + \frac{g}{4!}\varphi^4 \\ &\quad + \frac{1}{64\pi^2}M^4(\varphi)\log\frac{M^2(\varphi)}{\Lambda'^2}.\end{aligned} \tag{37}$$

真空の揺らぎのために，低エネルギーの有効相互作用は紫外の発散を持っている．そこで，くりこまれた質量と結合定数を次のように定義する[*6)]．

$$\begin{aligned}m_R^2 &= m^2 + \frac{g}{16\pi^2}\left(\Lambda^2 - \frac{m^2}{2}\log\frac{\Lambda'^2}{\mu^2}\right), \\ g_R &= g\left(1 - \frac{3g}{32}\log\frac{\Lambda'^2}{\mu^2}\right).\end{aligned} \tag{38}$$

ここで，μ は $V_{\text{eff}}(\varphi)$ から Λ を追い出すときの，有限の不定性を示す量で質量の次元を持ち，くりこみ点と呼ばれている．くりこまれた質量 m_R とくりこまれた結合定数 g_R を有限に保って，$\Lambda \to \infty$

*5) 以下では記号を簡単にするため，時間の単位を取りかえて $c = 1$ とし，質量の単位を取り直して $\hbar = 1$ とする．この単位を用いると，質量と長さは逆の次元を持つ．また質量・エネルギー・運動量はすべて同じ次元を持つ．

*6) 一般には波動関数のくりこみと呼ばれるものが必要だが，この最低次の近似では必要ない．

に持っていけば $V_{\rm eff}$ の2次と4次の項を有限にすることができる．φ の高次の項も $M^2(\varphi)$ をくりこまれた量

$$M^2(\varphi) = m_R^2 + \frac{1}{2} g_R \varphi^2 \qquad (39)$$

で置き換えれば，差は g のオーダーなので，$V_{\rm eff}$ を展開したとき $g_R\varphi^2$ の展開係数には影響を与えない．したがって，最低次の近似では，**質量と結合定数のくりこみさえやっておけば，有効相互作用全体が，有限に求められた**ことになる．

$$V_{\rm eff}(\varphi) = \frac{1}{2} m_R^2 \varphi^2 + \frac{g_R}{4!}\varphi^4 + \frac{1}{64\pi^2} M^4(\varphi) \log \frac{M^2(\varphi)}{\mu^2}. \qquad (40)$$

ここで，$\log M^2(\varphi)$ を g_R で展開すると，φ^{2n} の項が現れるが，この項は $2n$ 個の粒子が一点で衝突する過程を表す．その項は，最低次の近似では g_R^n の次数で出てくることがわかる．低エネルギーに住んでいるときには，もともとの相互作用 (28) よりも，この有効相互作用を使った方が計算も簡単で便利である．我々が直接実験できる低エネルギーの粒子と，量子揺らぎで生成・消滅を繰り返している高エネルギーの粒子との相互作用の結果を，有効相互作用として取り込んでいるからである．このような有効相互作用のうち，$\Lambda \to \infty$ のとき発散する可能性があるのは，φ^2 と φ^4 の係数だけになるのは次元解析で明らかであろう．$V_{\rm eff}$ は $[M]^4$ の次元を持つが，φ^{2n} は $[M]^{2n}$ の次元を持つため，その係数は $[M]^{2(2-n)}$ の次元を持ち，せいぜい $\Lambda^{2(2-n)}$ 程度の Λ 依存性しか出てこない．このうち，発散するのは $n=1$ と $n=2$ の項だけである*7)．したがって，摂動論の範囲で発散が出るのは，質量の項と $g\varphi^4$ の項だけなので，質量と結合定数のくりこみさえやっておけば，有効相互作用全体を有限にできることになる．

くりこみ点 μ を動かすと，くりこまれた結合定数 $g_R(\mu)$ は変化する．g, m, Λ を固定したときの g_R の変化の割合を $\beta(g_R)$ と書くと，最低次の近似では

*7) $n=2$ のときは対数発散．

$$\beta(g_R) = \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu} = \frac{3g_R^2}{16\pi^2} \qquad (41)$$

となり，μ を大きくすると $g_R(\mu)$ は大きくなることがわかる．結合定数 $g_R(\mu)$ のくりこみ点依存性を表すこの方程式をくりこみ群の方程式と呼ぶ*8)．(38) で $\mu = \Lambda$ とおくと

$$g_R(\mu = \Lambda) = g \qquad (42)$$

となることから，$g_R(\mu)$ は g と低エネルギーにおける結合定数をつなぐエネルギースケール依存性を持つ結合定数になっている．実際，くりこみ群の方程式 (41) を解くと

$$g_R(\mu) = \frac{g_R(\mu_0)}{1 - \dfrac{3g_R(\mu_0)}{16\pi^2} \ln \dfrac{\mu}{\mu_0}} \qquad (43)$$

となるが，μ をあまり大きくすると無限大になってしまう．これは，最低次の近似理論の適用限界を示している．

2.4 有効相互作用とくりこみ可能性

物理学は我々の経験から始まった．我々のサイズの世界を支配するニュートンの運動法則は，かつて絶対的法則と考えられた時代もあった．しかし，技術の進歩とともに我々の経験できる世界も大きく広がってきた．より広い世界に出てみると，我々は摩訶不思議な現象を経験するようになった．こうした不思議な事実を説明するために，より基本的な法則として相対性理論や量子力学が出現した．

我々の経験できる世界はマクロとミクロの両方向に広がっていく．ミクロの世界に入るとより基本的な法則が存在する．そのミクロの世界の法則から見れば，マクロの世界の法則はより低エネルギーの世界で成り立つ現象論的な有効理論である．我々はマクロの世界からミクロの世界に向かうので，基本的な法則が何かを知らずに探し続けるわけだが，我々にはどのようなヒントが与えられるのだろうか．

これまでのところ，自然は幾つかの階層構造を持っていた．原子の世界，原子核の世界，ハドロ

*8) 群という言葉については，青木氏の記事を参照されたい．

ンと呼ばれる陽子・中性子・パイ中間子などの粒子のつくる世界，そしてクォーク・レプトンの世界などが階層をつくっていた．湯川が核力を場の量子論を用いて分析したことは既に述べた．湯川は陽子・中性子もパイ中間子も素粒子と思って，それを用いて場の量子論をつくった．それらの粒子は現在ではより基本的なクォークとグルーオンの束縛状態だと思われている．現在，我々はクォーク・レプトンやグルーオンなどゲージ粒子と呼ばれるものを用いて場の量子論をつくっている．これまで，各段階でくりこみのできる場の量子論をつくることができた．多くの場合，場の量子論は基本法則ではなく，各エネルギー・スケールにおける現象論的な有効相互作用と見なされる．有効相互作用には必ず適用範囲があって，その範囲を飛び出すとまた別の場の理論に取って代わられる．どうして各階層で我々はくりこみ可能な場の量子論を持てるのであろうか？

摂動論的にくりこみのできる理論とは，相互作用の強さを表す結合定数 g が，次元を持たないか質量の次元を持つ場合である[*9]．エネルギー・スケール Λ のミクロ世界を記述する理論を考えよう．低エネルギーの世界（$E \ll \Lambda$）には，ミクロ理論で質量が零に近い粒子だけが現れる．この軽い粒子間の相互作用がマクロ世界の有効相互作用になる．相互作用があまり強くないときには，低エネルギーの物理量を結合定数 g のべき級数に展開することができる．g が $[M]^d$ の次元を持つとすると，散乱振幅などには無次元の gE^{-d} の形でエネルギー E が入ってくる．$d \geq 0$ ならば，低エネルギーの極限 $E \to 0$ でこの項は重要になる．逆に，$d < 0$ ならば，低エネルギーで効かなくなる．したがって，**ミクロの理論が何であれ，低エネルギーで生き残ってくる有効理論は，$d \geq 0$ のくりこみ可能な理論になると予想される．** このことが，未知の高エネルギーの情報を知らなくても，安心してくりこみ可能な理論を用いて，低エネルギーの世界の現象を説明できることを我々に保証してくれると考えられる．

場の種類を決めてしまうと，くりこみ可能な相互作用に含まれるパラメーターの数はごく少数に限られる．ミクロの世界にあったほとんどの自由度は，このごく少数のパラメーターにくりこまれてしまい，マクロの世界からはその存在を知ることはできない．強い相互作用と弱電磁相互作用を統一しようとする大統一理論ではミクロの世界とマクロの世界のスケールが 10^{15} 程も違っている．ミクロの世界には色々な種類の多数の未知の粒子が存在すると思われている．だが，未知の粒子の寄与は，くりこみ可能な低エネルギー理論に含まれる質量・結合定数など幾つかのパラメーターにくりこまれてしまう．唯一，その幾つかのパラメーターの間に成り立つ関係式が，ミクロの世界に大統一理論があるというヒントを与えている．

階層があまり開いていない場合は，ミクロの世界のエネルギー・スケール M が，くりこみ可能な相互作用に対する補正項として現れる．この項はくりこみ不可能な形をしており（$d < 0$），低エネルギーでは非常に小さくなるが，精密実験を行ってその存在を見いだすことができる場合がある．このような項はミクロの世界の法則の情報を直接に示してくれる．弱い相互作用と呼ばれたくりこみ不可能な相互作用の存在が，弱電磁相互作用と呼ばれる理論を見いだすのに重要な役割を果たした．もし，エネルギーを上げて実験することが可能ならば，この項の寄与はエネルギーとともに急速に増大するので，べき級数が収束しなくなるあたりで，新しい階層を見いだすことができる．大統一理論のように，スケールの比が余りに大きい場合には，エネルギーを上げて直接ミクロの世界に近づくのは不可能に近い．このような場合でも，非常に小さい確率でしか発生しないが，くりこみ不可能な理論でしか起こらないような現象を探し出せば，大統一理論の証拠を掴むことができる．現在，神岡で行われている陽子崩壊の実験では，このようなくりこみ不可能な効果を見つけようとしている．

摂動論的にくりこみができない重要な例に重力

*9) 非摂動的なくりこみについては青木氏の記事「非摂動論的くりこみ群」を参照されたい．

がある．重力のくりこみ不可能性は，ミクロの世界に重力を含む統一理論が存在することを示唆していると思われる*10)．

くりこみ可能な低エネルギー有効相互作用であっても，漸近自由な場の理論の場合と，漸近不自由な場合がある．結合定数が高エネルギーで零になるときを漸近自由という．漸近不自由な場合には，式 (43) のように結合定数が高エネルギーで次第に大きくなる．結合係数が十分はやく無限大になる場合にはその辺のエネルギー・スケールになると，新しい理論に取って代わられると考えられる．

素粒子論では時間空間の次元を 4 次元からずらして理論をつくることがしばしばある．一般に，高次元空間になると場の演算子の次元が高くなるため，くりこみ可能な相互作用の種類は，著しく減少する．ここで考えた ϕ^4 の相互作用も 4 次元時空ではくりこみ可能だが，4 次元以上の時空ではくりこみ不可能になる．同じく，電磁気学のようなゲージ理論も 4 次元を越えるとくりこみ不可能になる．我々の世界のミクロの法則はすべてゲージ理論になっている．もし我々の世界が 4 次元より高い次元の時空であったなら，現在のような原子・分子は存在しなかったであろう．ゲージ理論がくりこみ可能になることと，我々の時空が 4 次元になったことと関係があると考えるのは妄想だろうか．

*10) 川合氏の記事を参照されたい．

（ひがしじま・きよし，大阪大学大学院理学研究科）

V．重力場の量子論

V. 重力場の量子論

重力場の量子化

湯川 哲之

重力場の量子化は理論物理学に残された最も基礎的な問題の一つであろう．それは宇宙の始まりや，すべての相互作用の統一に本質的な関わりを持つと考えられているからである．この問題の困難さは，量子化された時空の意味など哲学的な疑問は別にしても，基本的に非摂動的なところにある．最近，時空を格子状に分割することにより，量子化を数値的に実行する研究が盛んに行われ始めた．その現状を解説する．

1．重力場の量子化をとりまく環境

時空と物質の相互作用を記述する Einstein 方程式は時空の局所的な構造，すなわち曲率テンソル，と物質のエネルギー・運動量テンソルとが比例関係にあることを表している．ただその比例係数があまりにも小さく，重力が素粒子現象に影響を及ぼしているとしても，それを観測することは現在ある実験装置ではとうてい不可能である．重力の影響は小さいとはいえ，この方程式はミクロな素粒子の世界でも成り立つという考えを否定する理由は何もない．当然，物質場は量子力学に従っているのだから重力場も量子化されるべきだ，と考えられてきた．しかし標準的な摂動論による重力場の量子化にはその行く手にくりこみの不可能性が大きな障害として立ちはだかっている．(重力場の量子化の基本的問題について詳しくは「数理科学」9 (1994) の川合光氏の解説を参考にしてほしい．)

Einstein 方程式は局所量だけで書かれた微分方程式であるが，それを量子化する場合，非摂動論的な方法として標準的な Feynman の経路積分法では積分領域を，そのためには時空のトポロジーを指定する必要がある．すなわち重力場の非摂動論的な量子化は宇宙全体の位相幾何学的性質を考慮することなしには実行できない．我々の宇宙が閉じているのか開いているのかはいまのところわかっていないが，経路積分の精神からすれば開いた宇宙も考えなければならないだろう．この場合，Feynman 積分の自明な発散を避けるためには有限の空間に積分領域を限り，境界条件を与える必要がある．このような誰にも知りようのない条件が理論の中に入ってくることを嫌い，Hawking は宇宙は閉じているべきだと考えた[1]．何はともあれ重力場を量子化することは宇宙全体を量子化するということに他ならない．

近年，高エネルギー物理学者にとって，もう少し身近に重力場の量子化を考える動機が現れた．それは，Weinberg と Salam が提唱した標準模型の驚異的な成功と，さらに大統一模型の可能性への理論的な期待である．現在の加速器エネルギー領域では大きく異なる強さを持つ強・弱・電磁の 3 つの相互作用も，エネルギーが 10^{16} GeV 程度になると 1 つの力に統一されると信じられる理論的な根拠がある．さらにエネルギーをあとほんの 2

桁程上げると重力も同じ程度の強さの力になる．すなわち，力の大統一は重力も関わった形で成立する可能性が十分ある．重力を含む 4 つの相互作用を統一する量子力学的模型として華々しく登場した超弦模型は，それが生息可能な時空の次元が 10 という非現実さのためにいまのところ行き場をなくしているように見える．しかし，この模型自体発散の困難はなく量子力学的に明確に定義されていることから，どのような物理量も原理的には何の新しい仮定をつけ加えることなく計算ができる．にもかかわらずあの熱狂的な流行が嘘のように静まり返った主な原因は問題の非摂動性にあったと言える．もちろん模型自体まだ現象論的には多少の変更の余地はあるとしても，次元の問題についての解決のヒントはこの模型の力学的な性質の中に隠されているはずである．

Einstein 重力にしろ超弦模型にしろ，量子化の困難さの直接的な原因は問題の非摂動性にある．現在，このような問題に対して解決の糸口を発見することが期待できる唯一の実践的な研究手段は計算機によるシミュレーションである．次の節ではどのような計算法でこれらの問題を解こうとしているかを，主に 2 次元重力を例に解説し，続く 2 つの節で数値的方法による Einstein 重力，及び弦模型の計算結果について我々のグループの仕事を軸に紹介する．

2．力学的単体分割法

古典場の場合と同じように量子論においても場を具体的に構築することは特に非摂動的な要素が本質的な場の理論では必須のことである．このような理論は構成的場の理論と呼ばれるが，その代表格である格子ゲージ場の理論が量子色力学(QCD)の低エネルギーでの振る舞い，例えばクォークの閉じこめやハドロンの質量の計算に本質的な役割を果たしていることはよく知られている．重力場の量子化にも同じような方法が役に立つと期待することは十分理解できる．すなわち，Einstein 重力では 4 次元時空を，弦模型では弦の軌跡が作る 2 次元世界面をそれぞれ格子化し，自由度を有限にして場を具体的に構築する．ただし，QCD では空間の分割に正則格子を用いたのに対し，重力場の場合は単体分割（三角分割）により格子化する．単体分割した時空で古典重力場の研究をすすめることはすでに 1961 年 Regge により提案されている．重力理論は時空の幾何を定める理論だから先験的に座標を導入することなく定式化できる，というのが彼の主張であった．この方法は Einstein 方程式が非線形であることより重力場が強い場合，例えばブラックホール近傍，の解の数値計算にその威力を発揮すると考えられてきた．しかし，この理論が重力の量子化においても有用であることが再認識されたのはずいぶん後の 1984 年頃であった．

それではここで Regge の方法を簡単に説明しよう．次元が d の閉じた空間を考え，これを d 単体(例えば $d=0,1,2,3$ は各々頂点，辺，三角形，四面体に対応している）で分割する．どんなに複雑な空間も十分細かく分割すればいくらでも良く単体の集合（複体）で近似できると期待される．これが正しい多様体となる条件は，ある 1 つの頂点を共有する幾つかの d 単体が $d-1$ 次元球面を形作るように分割されていることである．各単体は平坦な空間の要素と考えられているので，空間のゆがみすなわち曲率は単体の結節部分(ヒンジ)に集中している．d 次元空間のヒンジは $d-2$ 単体である．例えば 2 次元面では曲率は各頂点での欠損角(2π とその頂点周りの三角形のなす角の総和との差）をその頂点周りの三角形の面積で割ったものとなる．単体分割された空間の幾何は，どの頂点の組が互いに辺で結ばれているかを表す連結行列と，各辺の長さを与えることにより決まる．

次に，この空間の量子化について考えよう．もちろん，ここではその哲学的な意味ではなく具体的な方法についてのみ問題にする．一般的な量子化法としては Feynman の経路積分法がよく知られている．それによれば，ある状態から別の状態

への遷移確率はそれら2つの状態を結ぶ全ての古典経路について適当な重みで足し上げることにより求められる．通常，保存系ではカノニカル座標で書かれた作用関数を時間は虚数軸方向にとって（Wick 回転）指数化した Boltzmann の重みが使われる．量子重力では時空の全ての可能な状態についての和をとる必要があり，境界条件の不定性を避けるためには閉じた空間に限らざるを得ない．単体分割した空間の状態は連結行列と辺の長さを指定することで完全に決められるが，正しい多様体となる条件を満たす連結行列と辺の長さの全ての可能な組み合わせを足し上げたのでは十分すぎると考えられている．現在一般に採用されている方法としては，辺の長さを固定して異なる連結状態を足し上げる力学的単体分割法（dynamical triangulation = DT）と，連結状態を1つに限り辺の長さについて積分する Regge 計算法（Regge calculus）の2つがある．後者の場合，積分の測度を与える必要があるが一般座標変換に対して不変な測度は知られていない．以下の議論は2次元では解析的に求めた解と一致すると信じられている DT 法で進める．

話を簡明にするため2次元面（2次元重力または弦模型）を例にとり，計算の過程を追って行こう．シミュレーションをするのは分配関数

$$Z = \sum_g \sum_x \exp(-S_g - S_x - \lambda A) \qquad (1)$$

である．ここで g，および x の和は各々空間のトポロジーを決めて許される三角分割，および物質場の配位についてとる．また S_g および S_x は空間と物質の作用関数，A は面積，λ は宇宙定数（化学ポテンシャル）を表す．トポロジーについての和もとる必要があるが異なる位相の宇宙は各々独立と考えてトポロジーを1つ選び計算する．DT 法では通常辺の長さを一定にし，面を正三角形で分割する．空間の作用関数（Einstein-Hilbert 作用）は Regge によれば

$$S_g = 2\kappa \sum_h \delta_h$$

と書ける（κ = 重力定数の逆数）．ただし δ_h はヒンジ h での欠損角である．2次元 DT 法では q_h を頂点 h を共有する三角形の数とすると正三角形の内角は $\pi/3$ だから

$$\delta_h = 2\pi - \frac{\pi q_h}{3}$$

となる．ここで頂点 h についての和を実行すると

$$S_g = 4\pi\kappa\left(N_0 - \frac{1}{2}N_2\right)$$

と書ける．ただし N_i は三角分割された面の i 単体の数である．さらに Euler の関係式

$$\chi = N_0 - N_1 + N_2$$

と三角分割の関係式 $2N_1 = 3N_2$ を使えば

$$S_g = 4\pi\kappa\chi$$

と書き換えられ，S_g は面のトポロジーだけによる Euler 指標 χ に比例した定数となる．物質場の作用関数として d 個の自由スカラー場 x（$= x^{(a)}$, $a = 1, 2, \cdots, d$）が各頂点に乗っている場合は

$$S_x = \frac{1}{2}\sum_a \sum_{[i,j]} [x_i{}^{(a)} - x_j{}^{(a)}]^2$$

で与えられる．ここでの和 $[i, j]$ は連結した頂点の組についてとる．

さてこれからが計算機シミュレーションである．きまったトポロジーを持つ面の，可能な三角分割の数はその面を構成する三角形の数とともに

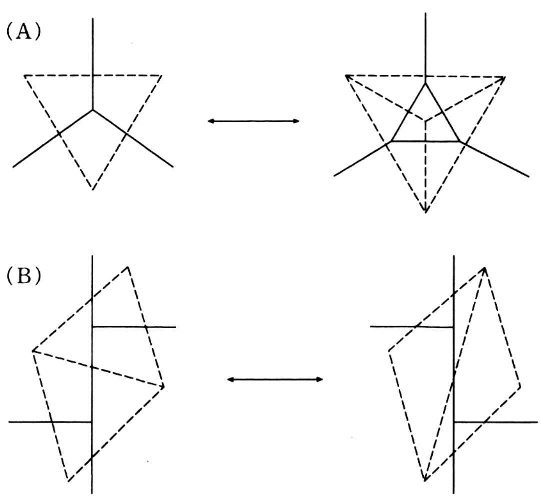


図1　2次元 DT 法のムーブ．実線がデュアル図．
(A)重心細分（1-3 ムーブ）とその逆（3-1 ムーブ）．
(B)フリップ（2-2 ムーブ）．結び目が入れ替わる．

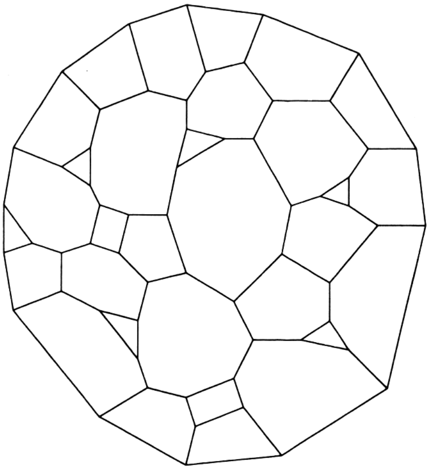


図2　2次元三角分割のデュアル図（fishnet 図）

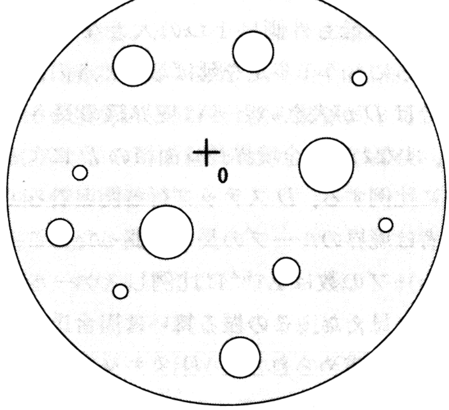


図3　ループ長分布の測定．ある点（0）からスタートして D ステップで行ける領域とその境界．

指数的に増えてゆく．このような系のシミュレーションは，重み関数に比例した確率で代表的な配位をランダムに選び出すモンテカルロ法が標準的である．すなわち系を十分に攪拌し熱平衡状態にすれば状態は正しい重みで選び出せる．三角分割した面の状態の攪拌は次のような方法で行う．まず初期状態として4つの正三角形で構成された正四面体をとる．一般の状態は次の3つのムーブ（move）と呼ばれる操作を繰り返すことにより作られる．図1(A)で示されたムーブは重心細分（または1-3ムーブ）と呼ばれ三角形の数を2個増やす．もちろんこの逆ムーブ（3-1ムーブ）も存在する．図1(B)はフリップ（2-2ムーブ）と呼ばれ三角形の数は変えない．もし面積（三角形の数）を固定したシミュレーションを行うならフリップだけで十分である．この場合でも，どのような2つの状態もフリップ・ムーブを重ねることで互いに移ることができる（エルゴード性）．このことは三角分割のデュアル図（図2）を見ればわかりやすい．この図（漁網に似ているため fishnet 図とも呼ばれる）でフリップは結び目の入れかえになっている．どのような結び方をした漁網も2次元的である限り結び目を入れかえるだけで作れるということである．またこれらのムーブにより面のトポロジーを変えることはない．同じような方法によって3及び4次元面も研究されている．その結果を次の節で紹介しよう．

3．量子 Einstein 重力のシミュレーション

まず2次元重力の計算から眺めてみよう．2次元のシミュレーションは Liouville 場の理論やランダム行列理論が与える解析的な解と直接比較できることもあり，計算精度のチェックや高次元重力のための計算方法を確立する上で重要な役割を果たす．最初は最も簡単な場合，すなわちトポロジーは球面に，三角形の数も N_2 に固定し，物質場が存在しない重力場だけの系（純重力系）を考えよう．この場合，系の作用は面の状態によらず一定だから，分配関数は全ての可能な三角分割のグラフを同等に足し上げたものすなわち状態の総数そのものになる．この系には特徴的なスケールがなく平衡状態の宇宙は大きな構造も小さな構造も同じ規則性を持っていると予想される．そのフラクタル的な性質は，面の次元（Hausdorff 次元）に現れる．それを次のような方法で測ろう．まず，面上に1人の観測者をおく．この観測者は，ある1つの三角形（0）を起点として1歩毎に隣り合う三角形に飛び移って行くとする．起点から D 歩で行ける三角形を全部色づけしたとすればそれはおおよそ図3のようなものになろう．色付けされ

ていない小さな穴は高い山や深い水底であり，僻地の境界は最も外側に1つの大きなループを作る．さらにもう1歩足を延ばしたときの三角形の増加分は D が大きいときは境界線の長さに比例する．すなわち，全境界長は面積の D による微分係数に比例する．D ステップ行ったところでこの観測者は境界のループの長さを測ったところ長さ L のループの数は $L^{-5/2}$ に比例しスケールしているように見えた．この振る舞いは川合氏たちにより解析的に求められた[2)]．D ステップ行ったときの境界をなす長さ L のループの数 $N(L, D)$ は $x = L/D^2$ をスケーリング変数として

$$D^2 N(L, D) \approx \left(x^{-5/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2} + \frac{14}{3}x^{1/2}\right)e^{-x} \tag{2}$$

のユニヴァーサルな関数で表せる．実際，三角形の数が 20 k (2×10^4) の数値シミュレーションのデータでは図4のように理論カーブと良く一致している．

これらのことから，この面には2つの次元が考えられる．その1つはナイーブな Hausdorff 次元で，D ステップで色づけされる三角形の数 A を漸近的に D^{d_H} と書いたときの d_H である．式(2)

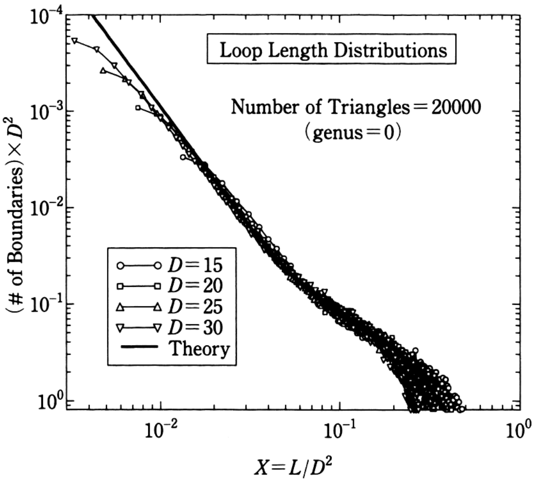


図4　ループ長分布の比較．三角形の数 20,000 のシミュレーションでステップ数 $D = 15, 20, 25$ 及び 30 の実験値と理論のユニバーサル・カーブ（太い実線）．

より D が大きいときは全周長への寄与は $x^{-5/2}$ の項からが最も大きくそれは D^3 に比例する．すなわち面積は D^4 に比例することになり Hausdorff 次元は4となる．しかし，これをそのまま面の次元と考えるには少し問題がある．その理由は比例係数が三角形の辺の長さに依存し，それが三角形の辺の長さがゼロの連続極限で発散することによる．一般に正則化パラメータにあからさまに依存するような量は系の普遍的な性質を代表しない．これに対して最大の長さを持つループは $x^{1/2}$ 依存性からもわかるように D^2 に比例し，またその比例係数は連続極限で一定になる．$x^{-3/2}$ でスケールしている中間サイズのループもこれと同じ次元を持つ．したがって小さい量子揺らぎを平坦化してできる面は次元が3のユニヴァーサルな面を作る．

Einstein 重力は摂動論では量子化できない．しかし，古典力学としては正しく運動を記述することから，それは正しい重力理論の低エネルギーでの有効理論だとする立場もある．この状況は非線形シグマ模型を QCD の低エネルギー有効理論と考えるカイラル摂動論の立場と共通する．シグマ模型では場の微分に対して低い次数の摂動による発散は，より高次の摂動により打ち消される．QCD はくりこみ可能だから結局上のような発散の打ち消し合いが起こると期待できる．このような立場から2次元重力の有効作用として次のような高次微分項をつけ加える：

$$\beta\int d^2\xi\sqrt{g}\,R^2 + \alpha\int d^2\xi\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\partial_\mu R\partial_\nu R.$$

これらの高次微分項はその係数の次元から2次元重力の連続極限では重要でなくなると考えられている．しかし，高次元重力の2次元断面や物質場が面に及ぼす効果は2次元純重力の面とは異なる面を作ることより，高次微分項が連続極限でも生き残ると考えてシミュレーションをすることは面の状態の分類に役立つ．この作用を三角分割で格子化した空間の作用に書き換えると，q_i を頂点 i を共有する三角形の数としたとき

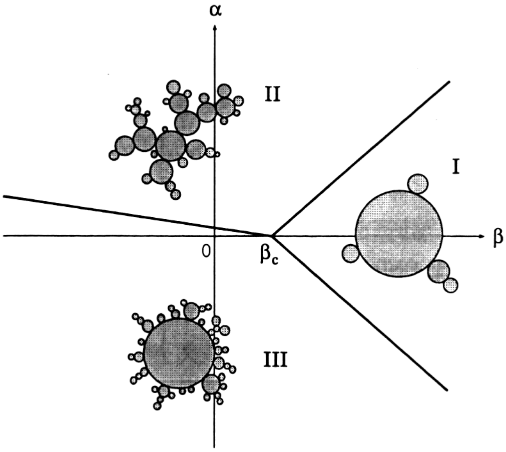


図5　2次元ランダム面の3つの相．最小くびれで繋がっている子宇宙を模式的に描いてある．原点はフラクタル状態．

$$\beta_L \sum_i \frac{(6-q_i)^2}{q_i} + \alpha_L \sum_{[i,j]} \left(\frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_j} \right)^2$$

となる．ただし，α_L, β_L は格子間隔を1にスケールしたときの結合定数である（以下理由のない限りこれらを α, β と区別しない）．この係数が正のとき，第1項は $q_i = 6$ の平坦な面を作るよう，第2項は $q_i = q_j$ と隣り合う2つの頂点の曲率を同じにするように働く．この2つのパラメターのいろいろな組み合わせについてモンテカルロ計算をすると2次元面はおおよそ図5のように3つの状態に区分される．すなわち

I．平坦相 $(\beta-\beta_c>|\alpha|)$：多くの頂点は6個の正三角形を共有する．

II．ポリマー相 $(\alpha>\beta-\beta_c, \alpha>0)$：細い筒が枝分かれして連なっている．

III．しわくちゃ相 $(\alpha<\beta_c-\beta, \alpha<0)$：隣り合う頂点の曲率の符号が異なる．

面の様子は最小のくびれ（三角分割では長さ3のループ）により繋がっている子宇宙のネットワークを調べることで視覚的に捉えられる．図5に見るように平坦相やしわくちゃ相には一つ大きな宇宙（母宇宙）が存在するが，ポリマー相にはそれがないことが特徴的である．

次に，3次元シミュレーションに話を移そう．この場合，面の4個の変数 N_i $(i=0,1,2,3)$ のうちEulerの関係式と三角分割の関係式 $2N_2=4N_3$ より独立なものは2個になり，宇宙項もいれたEinstein作用関数は

$$S_L = k_3 N_3 - k_0 N_0$$

と書ける．また3次元DTのムーブは1-4(4-1)と2-3(3-2)の4種あり，これらを組み合わせることによりトポロジーを決めたときの可能な全ての状態は実現される(エルゴード性)．これらのムーブは3単体の数を変えるため，いわゆるグランドカノニカルモンテカルロ法を使ったシミュレーションをする必要がある．次に示すデータは k_3 を適当に調節し定まった3単体数を持つ面で統計平均をとった結果である．まず k_0 の変化による平均曲率の変化を見るとそれには履歴がある．すなわちこの系は1次相転移の様相を示す．どのような面の間の転移であるかを見るために2次元の場合のループ長分布に似た統計をとる．D ステップで行ける領域の境界は幾つかの閉じた2次元面からなるが，それらのEuler指標や面積の分布をとる．例えば高温側(強結合側)では，1つの大きい面(母宇宙)と多くの小さな面からなっている．母宇宙の面のEuler指標は負の大きな数であり，非常に多くのハンドルを持つ複雑な表面であることを示している．一方小さな揺らぎの面はほとんどが球面である．母宇宙はその面積の D 依存性がほぼ D^3 であることより，その次元は4となる．またナイーブなHausdorff次元も4と観測されている．これは量子揺らぎが支配的であった2次元の場合とは異なる．より大きなサイズのシミュレーションをすることにより母宇宙の体積が量子揺らぎの宇宙を凌駕し，巨視的にはフラクタル次元が4のユニバーサルな宇宙ができる可能性もある．

最後に，簡単に4次元でのシミュレーションの現状を述べる．計算方法は基本的には2, 3次元の場合と同様であるが，5個の変数 N_i $(i=0,1,\cdots,4)$ のうち，3つの関係式(Eulerの関係式，三角分割の関係式，さらに多様体の条件式が付け加わる)

より2個が独立となる．そこで，Einstein 作用を

$$S_L = k_4 N_4 - k_2 N_2$$

と書き，k_4 を調節して定まった4単体数を持つ配位で統計平均をとる．k_2 の変化による平均曲率はある k_2 の値で急に変化するが，その点近傍で履歴は見えていない．さらに曲率の平均値からの揺らぎもその点を中心にピークしているなど2次相転移の様相を示す．この結果はこの分野の研究者を大いに勇気づけたことは容易に察せられる．2次相転移点上では格子のとり方によらないユニバーサルな連続極限がとれ，重力が場の理論として普遍的に定義されるかもしれない，との期待がこのとき大きく膨らんだことは確かである．

しかし，計算の結果を注意深く眺めるとそんなに喜んでもいられないというのが現状である．シミュレーションで求めた4次元空間には我々の常識では理解できない異常な構造が見えている．ある頂点と繋がった辺の数（バーテックス・オーダー）が異常に大きい頂点が高温側で常に2点存在するのである．この異常なバーテックス・オーダーは系のサイズを大きくすればそれに応じて増えていくように見える．逆にこれを押さえるために新しい作用をつけ加えると相転移が消えてしまう．いまのところこの現象が有限サイズ効果なのかどうかは明らかでない．なにしろ，2, 3次元の計算結果から予想すると4次元の Hausdorff 次元は5ないし6にもなり，宇宙の一辺の長さが10ステップのシミュレーションでも 10^6 の格子が必要となる．これはいまのところ計算機（ワーク・ステーション）の能力の限度であり今後この性能の向上なしにははっきりとした結論を出すことは難しい．

4．弦模型のシミュレーション

4次元 Einstein 重力のシミュレーションが計算機の性能不足で足踏みしているというのはどうも納得できない．格子ゲージ理論のようにスーパー・コンピュータを使えばいい，と思う人もいるだろう．実はランダム格子を並列計算機でシミュレーションすることは現在の計算機の設計では不可能なのである．一方，弦模型のシミュレーションは最大26個のスカラー場，もしくは52個の Ising スピンを2次元ランダム面上に乗せてモンテカルロ計算をするが，物質場についてはベクトル化や並列化が可能なのでスーパー・コンピュータの能力を発揮させることができる．2次元だと宇宙のサイズも一辺が約1千ステップ程とれ十分に大きい．スーパー・コンピュータを使った本格的な計算は今後の課題であるが，いままでにワーク・ステーションで得た結果を示そう．

d 次元空間内の弦の分配関数は南部・後藤により

$$Z_{\mathrm{NG}} = \int D[x^{(a)}] \exp(-m^2 A)$$

で与えられた．ここで A は弦の軌跡（世界面）$x^{(a)}(\xi_1, \xi_2)$ の面積

$$A = \int d^2\xi \sqrt{h}$$

であり，h は面の曲率テンソル

$$h_{\mu\nu} = \sum_a \partial_\mu x^{(a)} \partial_\nu x^{(a)}$$

の行列式で与えられる．Polyakov は Z_{NG} の代わりに

$$Z_{\mathrm{Poly}} = \int D[g_{\mu\nu}] D[x^{(a)}] \exp(-S_\lambda)$$

を弦の分配関数として計算することを提案した．ここで

$$S_\lambda = \lambda \int d^2\xi \sqrt{g} + \int d^2\xi \sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \partial_\mu x^{(a)} \partial_\nu x^{(a)}$$

は Polyakov 弦の作用関数である．Z_{Poly} は計量テンソルについての経路積分をその古典解で評価すると Z_{NG} に一致する．これは d 個の自由スカラー場と結合した2次元重力そのものであり，式(1)はこれを格子化したものである．この分配関数は $d \leq 1$ の多くの場合に解析的な解が求められている．しかし d が1より大きいとき解析的に得た弦の臨界指数（string susceptibility）が複素数になり物理的でない解となる．その理由としては面が不安定になり2次元的な構造を失うと考えられている．例えば1次元的ポリマー相や3次元的なし

わくちゃ相に転移するようなことが起こっていると考えられる．

面の状態を特徴づける変数（オーダー・パラメター）は一体何だろうか．少し唐突であるが次に述べるような理由から面の比抵抗をオーダー・パラメターと考える[3]．2 次元導体面上に幅 a，長さ b の小さな矩形部分を考えよう．その抵抗は

$$R = r\left(\frac{b}{a}\right)$$

で，r は導体面の比抵抗である．明らかに抵抗は矩形を縦横同じ割合でのばしても縮めても変わらない．すなわち，抵抗は面の局所スケール変換に対し，不変である．また，比抵抗も物質の電気的性質にのみよりその形状にはよらない．したがって，いろんな 2 点間での抵抗を測り比抵抗を求めればこの導体面が等質の伝導体でできているかどうかを調べることができる．もし比抵抗が一定ならこの導体は等質な物質で作られたということである．もし比抵抗が場所によりばらばらな値をとるときは，導体面が等質物質でできていても枝分かれした 1 次元的なポリマー状になっていたり，逆に面が厚みを持った 3 次元的な状態になっているため比抵抗が幅を持って分布していると考えられる．

導体面の抵抗を測定するために面上に次のように 4 点をとる（2 次元面上の点を複素座標 z で表す）．すなわち，単位電流を z_3 から入れ z_4 から出す．同時に面上の 2 点 z_1 及び z_2 間の電位差を測るとそれは

$$V_{34}(12) = -\frac{r}{4\pi}\log|[z_1, z_2, z_3, z_4]|$$

で与えられる．ただし

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

は非調和比と呼ばれる量であり，これは射影変換

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \ (ac - bd = 1)$$

に対して不変である．この性質を使うと 4 つの複素パラメター a, b, c, d を適当に選ぶことによって 3 点の座標を

$$z_2 = 1,\ z_3 = 0,\ z_4 = \infty$$

に移すことができる．そこで電位差

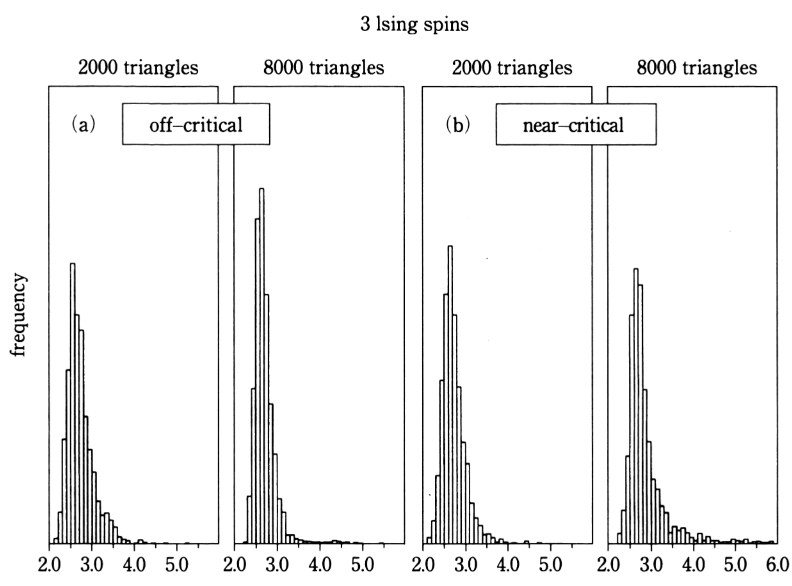


図 6 比抵抗 (r) 分布のサイズ依存性．2 次元三角分割面上の各頂点に 3 個の Ising スピンを乗せた．三角形の数が 2000 と 8000 のシミュレーションで比較した．(a) は臨界点外 (b) は臨界点上での測定．

$$V_{24}(13) = -\frac{r}{2\pi}\log|1-z_1|,$$

$$V_{34}(12) = -\frac{r}{2\pi}\log|z_1|$$

を測ることにより比抵抗 r がわかれば位置 z_1 が決まる．r を求めるためにはもう1点 (z_5) をとり z_1 を決めたときと同じように z_5 を決める．さらに z_1 と z_5 の電位差を測ることで r を決めることができる．もし各測定での r が一定値をとるなら面の複素構造がこの測定により決まることになる．

さて，この方法を三角分割した面に応用しよう．格子場の理論に対する我々の期待は，分割する三角形の面積を小さくすれば連続極限に近づき通常の場の理論が回復されるということである．実際，物質場がない場合の比抵抗値の測定では三角形の数が多くなればなるほど分布が鋭くなる．このときの分布の揺らぎの原因はたまたま測定点や電流の入出端子が互いに近くにとったため網の目構造があからさまに見えたためだと考えられる．同様の測定を物質場を入れたシミュレーションで行うと $d>1$ では比抵抗の値の分布が三角形の数とともに逆に広がる傾向が見える．これは2次元ランダム面がユニバーサルなものでないことを示している．例えばIsingスピンを各頂点に3個乗せたときの臨界温度上及び臨界温度外の比抵抗値分布のサイズ依存性を測定する．2個のIsingスピンは1個のスカラー場と同じ次元を持つと考えられているから臨界点上では $d=1.5$ となりユニバーサルな面を作らず分布はサイズとともに広がるが，臨界点外では $d=0$ の場合と同じ振る舞いをすることが予想される．実際図6に示すような予想どおりの計算結果が得られている．同様の傾向は2個以上のスカラーを乗せたシミュレーションでも見えている．

このような $d=1$ での比抵抗分布の振る舞いの変化からLiouville場の理論で知られている $c=1$ の壁と呼ばれる臨界指数の複素数化は面の不安定化と関係していることが示唆される．不安定になった面は前節で見た．3つある相のどれなのかを調べるために最小くびれで繋がっている子宇宙のサイズ分布を調べてみると，この面には母宇宙が存在することや曲率の揺らぎなどの観測より，しわくちゃ相であると結論される．これはLiouville場の理論で運動エネルギー項の係数が $26-d$ に比例している，すなわち物質場は面の曲率の揺らぎを助けるように働くことからも，もっともらしく思える．$d>1$ で面がユニバーサルな連続極限を持たないということになればそれは弦模型にとって非常にゆゆしい問題であり，このような不安定性を押えるにはフェルミオン物質も乗せた超弦模型のシミュレーションをする必要があるのかもしれない．

5. まとめ

数値シミュレーションによる重力場の量子化の問題をその方法と2,3および4次元Einstein重力理論および弦模型への応用の現状について解説した．直接実験による検証が不可能な量子重力場の理論では数値シミュレーションが重要な位置を占める可能性は大きい．それが十分意味を持つには計算機，計算アルゴリズム，そして適切な解析法の開発とともに信頼できる理論の存在が不可欠であることは，実験物理学と共通している．高エネルギー実験が標準模型の確立に基本的な役割を演じたように，いつの日か数値シミュレーションが量子重力場の理論，更に重力を含む真の大統一理論へのカギとなるデータを作り出せる環境を作り出すことがこの研究を続ける最大の目標である．

この解説を書くに当たって高エネルギー物理学研究所理論/数値物理部の多くの方々にお世話になった．特に，石橋，川合，浜田氏からは理論的な，また西村，羽倉，HariDass, Hanlon, 津田氏からは数値計算に関して多くの貴重な意見や未発表のデータをいただいた．紙面をお借りして感謝したい．

付記：その後の発展（1998年12月）

1) 4次元重力の新しい相

4次元純重力で観測されていた相転移は，結局，しわくちゃ相とポリマー相の間の1次相転移と結論され，我々の期待を裏切る結果となった．しかし，物質場を結合させると空間が安定化するとの理論的予想に基づき，単体分割した空間の各辺（リンク）上にゲージ場を乗せたシミュレーションを行い，しわくちゃ相とポリマー相との間に新しい相が現れることを確認した．現在，この新しい相としわくちゃ相間の相転移の次数を測定中であるが，それが我々の期待する2次である可能性は十分ある．

2) 格子超弦理論のシミュレーション

1995年以降，驚異的とも言える超弦理論の進展があったことはすでに周知のことである．すなわち理論の双対性と古典ソリトン解の発見により，様々な超弦模型が統一的に理解されるようになった．かつては摂動論的でしか分析されていなかった理論も，ソリトン解（D-ブレイン）を介して非摂動論的性質の一端を見ることができるようになった．さらに，構成論的超弦理論としてマトリックス理論が提唱され，いよいよ超弦理論の数値シミュレーションが待望される時期が来た．過去にも超弦理論の格子化が研究されはしたが，どれもフェルミオンの余分な自由度を持ち，満足できる理論ではなかった．今回，石橋・川合・北沢・土屋たちのマトリックス理論を格子化することにより正しい超対称性を持つ理論を作る目途がたち，超弦理論の数値的研究に原理的な問題はなくなった．残されているのはフェルミオン積分をどれほど大規模に行えるかという技術的問題である．

参考文献

1) S. W. ホーキング：「ホーキング宇宙を語る」林一訳，早川書房.
2) H. Kawai, N. Kawamoto, T. Mogami and Y. Watabiki：*Phys. Lett*. **B306** (1993) 19.
3) H. Kawai, N. Tsuda and T. Yukawa：*Phys. Lett.* **B351** (1995) 162.

（ゆかわ・てつゆき，総合研究大学大学院・教育研究交流センター）

V. 重力場の量子論

重力理論とトポロジー

藤原 義久・細谷 暁夫

1. はじめに

ここで取り上げるのは,「我々の宇宙のトポロジーが時間とともに変化するという可能性があるか，もしあるとすればどのような過程でそのようなことが起こるのか」というテーマである．この問題は古くから議論されている．例えばプランクスケール以下では空間が量子論的にゆらいでいると考えられるが，そのとき空間のトポロジーは複雑に変化していくだろう．重力の量子論的効果がきくような状況では，トポロジー変化の記述はどうしても必要であるように思える．また宇宙の全体あるいはどこか一部分がその時間発展の結果，トリビアルでないトポロジーを持つことができるのか，できるとすればそれはどのような影響を及ぼすのかということを調べるのは興味深い．ここではまず2節で，古典的な重力理論においてそのような可能性がありうるか，あるいはどのようにそれが禁止されるかについてこれまで調べられてきた結果について振り返ってみる．次に3節では，量子論的なトンネル効果による宇宙の生成に注目し，同じ問題を議論することにしよう．これらの話を通じて，重力理論とトポロジーにどのような関係があるのかその一端を知っていただければ幸いである．

2. 古典重力とトポロジー

我々の日常生活のスケールから実験物理学や天文学で実験・観測されるスケールまで，時空間の次元が四次元でないという証拠は何もない．しかしこの節では，後で低次元重力モデルを考えるうえで必要になるのでまた次元の違いをみるために，しばらくのあいだ時空間が一般に n 次元 $(n \geq 2)$ であるとしよう．我々の宇宙は，時空間 M を適当なやり方で時間一定として「切った」$(n-1)$ 次元の空間的超曲面 Σ であると考えられる．まず次のことを仮定しよう．すなわち，空間的超曲面 Σ は（向きづけ可能な）コンパクトで境界のない（＝閉じた）滑らかな $(n-1)$ 次元多様体であり，時空間 M はコンパクトで滑らかな n 次元多様体であるとする．そうすると我々の問題は「異なるトポロジーを持つ $(n-1)$ 次元空間 Σ_1 と Σ_2 をつな

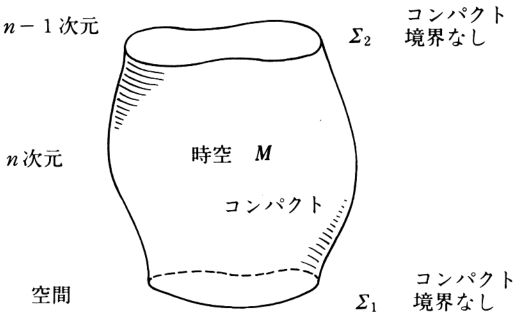


図1 時空の時間発展の模式的な図といくつかの仮定

ぐ，時空間としての n 次元多様体 M が存在するか？」と表現することができる(図1)．もしそのような M が存在すれば，「あるトポロジーを持つ宇宙 Σ_1 が時間発展した結果，別のトポロジーを持つ Σ_2 という宇宙になった」と言うことができるだろう．

この問題を次のように考えることにする．まず多様体の位相幾何学的性質だけに着目し，時空間 M に入るべきローレンツ計量のことは忘れて(下述)，Σ_1 と Σ_2 とをつなぐような多様体 M が存在するかどうかということだけに注目する．このような問題は数学ではよく調べられていて，それはコボルディズム(cobordism＝同境)理論と呼ばれる．もしそのような M が存在すれば，Σ_1 と Σ_2 はコボルダント(cobordant)であるといわれる．ここではコボルディズムについてはこれ以上触れないことにし，当面我々の興味ある次元，すなわち $n=2, 3, 4$ についてはどんな Σ_1, Σ_2 もコボルダントであるということを知って十分であるとしよう．(詳しくは Milnor-Stasheff の有名な数学の本[1]をみられるとよい．)

しかしながら，勝手な Σ_1, Σ_2 に対してそれをつなぐような多様体 M が微分多様体として存在するとしても，それがローレンツ計量を持つ時空でないことには話にならない．ローレンツ計量とは，多様体上のリーマン計量の中で，それを二次形式としてみたときにその指標(signature)が $(-, +, +, +, \cdots)$ となるものをいう．例えばミンコフスキー空間上の計量 $ds^2=-dt^2+dx^2$ はローレンツ計量である．多様体 M が時空間として意味を持つには，M 上にローレンツ計量が存在しなければならず，その計量について Σ_1 と Σ_2 が空間的超曲面として埋め込まれている必要がある．以下ではまず，このローレンツ計量の存在が (Σ_1, Σ_2, M) に非常に強い位相幾何学的制限を与えることをみる．これらの結果は微分・位相幾何学からの美しい帰結である．

(1) 一般次元でのトポロジー変化の可能性

まず M 上にはローレンツ計量が縮退しているような特異点はないとする．またこれから考えるローレンツ多様体は時間向きづけ可能であるとする．ローレンツ多様体が時間向きづけ可能であるというのは，多様体上の各点で決まる未来向きの光円錐が多様体上で連続にとれるということで，未来に進むのと過去に進むのとを区別できることを意味する．この条件は物理的には因果律の最も基本的な要請である．

以上の仮定のもとに，異なるトポロジーを持つ宇宙をつなぐようなローレンツ多様体としての時空 M が存在し得るかどうかという疑問に答えることができる．ここでは一般の次元の場合，M にどのような位相幾何学的制限がつくかをみることにしよう．

上に述べたように，Σ_1, Σ_2 をつなぐ多様体 M は存在する．このとき，

定理1(Sorkin[2])　M 上に縮退しないローレンツ計量(それについて Σ_1 と Σ_2 が空間的超曲面であるような)が存在し，M が時間向きづけ可能なローレンツ多様体となるための必要十分条件は，

n が偶数ならば　$\chi(M)=0$

n が奇数ならば　$\chi(\Sigma_1)=\chi(\Sigma_2)$

である．□

ここで $\chi(M)$ というのは多様体 M のオイラー数という意味である．Σ_1, Σ_2 についても同様である．この定理の証明はあまり難しくない．興味のある方は文献2)をみてほしい．そこでは微分・位相幾何学の古典的結果[3]が用いられている．

四次元時空の場合この定理によって言えることは，Σ_1 と Σ_2 をつなぐ多様体 M が $\chi(M)=0$ という位相的制限を満たさない限りローレンツ計量が入らない，すなわち時空間としての意味を持たないということである．ところがおもしろいことに，いつでもその制限を満たすように多様体 M を変形できるのである(Geroch[4])．かりに $\chi(M)\neq 0$ であるとしよう．M とは別に，コンパクトで境界のない四次元多様体 N を用意する．M と N からそれぞれ適当な大きさの四次元球 D^4 をごっそり抜き出し，その結果できた三次元球面 S^3 を貼り合わせる(図2をみよ)．この手術の結果，Σ_1 と Σ_2

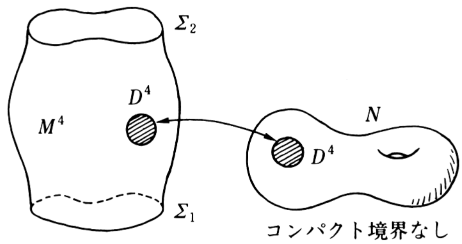


図2 四次元多様体のオイラー数を変える手術

をつなぐコンパクトな四次元多様体 M' が新たに得られたことになるが，

$$\chi(M')=\chi(M)+\chi(N)-2$$

が（ホモロジーの理論から）成り立つ．例えば N として四次元トーラス T^4 を用意すれば $\chi(N)=0$, 二次元複素射影空間 CP^2 を用意すれば $\chi(N)=3$ であるから，はじめに $\chi(M)\neq 0$ が何であっても，このような有限回の手術により $\chi(M')=0$ とすることができる．したがって四次元の場合，ローレンツ多様体であれという条件は実質上何の拘束も及ぼさない．異なったトポロジー Σ_1 と Σ_2 をつなぐローレンツ時空はいつでも可能であるということになる．

一方，後で述べる三次元時空の場合には上の定理のもたらす位相的制限は本質的である．閉じた二次元空間，いわゆるリーマン面のトポロジーはそのオイラー数のみで完全に分類される．したがって $\chi(\Sigma_1)=\chi(\Sigma_2)$ という条件は，二次元の閉じた宇宙のトポロジー変化が禁止されることを意味する．この点では四次元時空は三次元時空と違いトポロジー変化を許容しているようにみえる．しかしながら次にみるように，(四次元時空で)宇宙のトポロジー変化があったとするといくつかの物理的条件が破れてしまうことになる．

（2） 因果律と物質のエネルギー条件

四次元時空を考える．まず次の定理により，因果律が保たれる限り空間のトポロジー変化は起きないということをみよう．

定理 2 (Geroch[4]) Σ_1, Σ_2, M は上で述べた条件を満たすとする．もしローレンツ多様体が時間向きづけ可能で閉じた時間的曲線を持たないならば，Σ_1 と Σ_2 は微分同相でありさらに M は位相的には $\Sigma_1\times[0,1]$ に等しい．□

もし時空に閉じた時間的曲線があると，非常に奇妙な論理的矛盾を引き起こすことになる．例えば，宇宙船に乗って出発し，その閉じた時間的曲線に沿って旅行した後に，自分の出発前に戻って出発を阻止することができるだろう(？)．因果律の最も基本的な要請の一つとして閉じた時間的曲線はないとする．(注意：時間向きづけ可能ということと閉じた時間的曲線がないということは一応別の概念である．) この定理の証明も難しくないが紙面の都合上省略する．興味のある方は文献 4) をみていただきたい．

Geroch の定理は，因果律を破るような非物理的な時空を考えない限り（これまで仮定してきたような条件の下では）空間のトポロジー変化は起きないと主張している．さらに次に述べる定理では，因果律が破れるか破れないかにかかわらず物質場がエネルギー条件を満たしている限り，Einstein 方程式を満たす物理的時空においてはやはり空間のトポロジー変化は不可能であると言っている．

定理 3 (Tipler[5]) Σ_1, Σ_2, M は上で述べた条件を満たすとする．もし M 上で Einstein 方程式が満たされていて，物質場が弱いエネルギー条件を満足し，時空 M が generic condition を満たすならば，Σ_1 と Σ_2 は微分同相でありさらに M は位相的には $\Sigma_1\times[0,1]$ に等しい．□

ここで弱いエネルギー条件とは，物質場のエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ が任意の時間的ベクトル V^μ に対し，不等式 $T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu\geq 0$ を満たすことをいう．物理的にはこの条件は，どんな観測者の観測するエネルギーも非負であるといっており，古典的な通常の物質場についてはこの条件は満たされている．また時空が generic condition を満たすとは，時空上のどんな時間的ないし光的測地線も，次の条件を満たすような点を少なくとも一点含んでいることをいう．それはその点で測地線に接するベクトルを K^μ として，

$$K^\mu K^\nu K_{[\alpha}R_{\beta]\mu\nu[\gamma}K_{\delta]}\neq 0$$

で表される($R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ はリーマンテンソル，また[··]は二つの添え字の反対称化を表す)．この条件は，どんな観測者もその測地線上の少なくとも一点においては潮汐力を感じるということを要請する．(エネルギー条件と generic condition については Hawking-Ellis[6] の有名な教科書を見られたい．)

以上をまとめると，四次元時空においては異なったトポロジーを持つ空間をつなぐローレンツ時空はいつでも存在するが，その時空は必然的に因果律を破り，そこに存在する物質場は通常の古典的な場が満足するようなエネルギー条件を満たさないだろうということがわかった．

それでは，空間のトポロジーがさまざまに変化していくという過程はまったく禁止されてしまうのだろうか．一つの可能性は上で仮定したいくつかの制限をはずすことである．例えば上では時空 M には特異点がまったく存在せず，また M がコンパクトであるとした．時空 M がコンパクトでない場合にトポロジー変化の可能性があることは Yodzis[7] によって指摘されているが，そのような時空が物理的にどのようなものなのか明らかでない．また G. Horowitz[8] は，その点ではローレンツ計量が縮退しているがスカラー曲率は有限であるような特異点を含む，宇宙の枝分かれを表すような時空 M を構成している．それから，空間的超曲面 Σ はコンパクトで境界がない，つまり宇宙が閉じていると仮定したが，漸近的に平坦な空間が自明でないトポロジーを持つようなことがありうるだろうかという問題を考えてみることもできる．Gannon[9] によれば，弱いエネルギー条件と Einstein 方程式を仮定したとき，そのような時空には必ず特異点が存在する．そのような特異点が具体的にどのようなものかを調べることは興味深い(例えば Tomimatsu[10])．

もう一つ別の方向は，量子論を考慮したときに上で述べた描像はどれくらい変更されるかということである．例えば量子論的場の理論によればエネルギーの真空期待値は局所的に負になりうる．因果律や物質場のエネルギー条件を破る領域がごく小さなコンパクトなところに隠されて押し込められ，宇宙のトポロジーが変化するという可能性はあるだろうか．あるいは宇宙全体のようすがすっかり変化する過程としてもっとも著しいのは，量子論的な宇宙の誕生であろう[11,12]．量子論的に生まれた宇宙の持ちうるトポロジーには，どれくらいのバラエティーがあるのだろうか．次の節では宇宙の量子論的生成におけるトポロジー変化に焦点を絞っていくことにする．

3．量子重力とトポロジー

(1) 量子論的な宇宙生成

ここでは非常に荒っぽいことではあるが，量子論的な宇宙生成が通常の量子力学におけるトンネル効果とまったく同じように記述できるのだということを仮定して話をすすめることにする．図3のような一次元ポテンシャル障壁を通り抜ける一粒子の量子力学において，トンネル効果をどのように記述したかを思い出してみる．粒子の波動関数を半古典近似(WKB 近似)で求めるには，粒子の運動が古典的に許される領域と許されない領域においてそれぞれ波動関数を求めて，それらを適当につなぎあわせるということを行うだろう．このときトンネル中の粒子の波動関数は指数関数的に減少している．あるいは同じことだが，そこでの粒子の運動に対する作用(action)が純虚数になっている．このことを波動関数の経路積分の立場からみるにはトンネル中の粒子の仮想的な運動を記述する必要がある．そのためによくやられるの

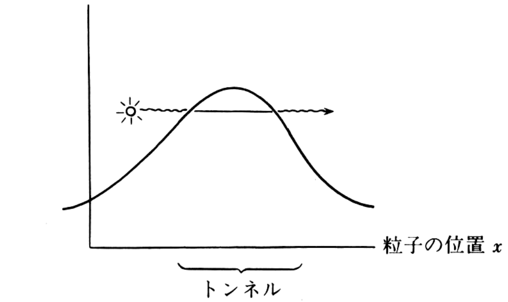


図3　粒子の量子論的なトンネル効果

は，時間を虚時間に解析接続し（$t\to -it_{\mathrm{E}}$, E はユークリッド化の意味)，それによりトンネル中の粒子の「古典的な」運動に対する作用 S_{E} を求めて波動関数の半古典近似を得るということである（$\Psi \sim \exp(-S_{\mathrm{E}})$)．

重力の場合にもこれとまったく同じやり方でトンネル効果が記述できるとして，上で述べたことを量子論的な宇宙生成過程にあてはめてみよう．重力における力学変数となるものは，時空間を適当なやり方で時間一定としてスライスしたときの空間的超曲面上の空間計量 h_{ab} である．いま，時間を虚時間に解析接続する方法により宇宙の無からの生成というトンネル効果を記述できるとすると，空間計量 h_{ab}(粒子の位置 x にあたる)はトンネル前後で連続につながる実数であるので，図4のように古典的には許されない領域の時空はユークリッド計量と同じ指標を持つユークリッド時空(リーマン多様体)で表される．そしてトンネルを通り抜けた後はローレンツ多様体として古典的な時間発展を行う．

次に，古典的に許される領域＝ユークリッド時空と許されない領域＝ローレンツ時空の境界にあたる空間的超曲面 Σ に注目しよう．もう一度粒子の量子力学のときをふり返ると，ちょうどトンネルから出たところでは粒子の位置に対する共役な運動量がゼロになることが容易に示せる．重力場の場合，空間計量に対する共役な運動量は，ほぼ外部曲率（extrinsic curvature）テンソル K_{ab} にあたる．これは大まかに言って，時空間に埋め込まれた空間的超曲面がどのように曲がりくねって埋め込まれているかを示す，超曲面自身に内在するテンソルである．したがって我々の仮定は，境界面 Σ において $K_{ab}=0$ を要請する．外部曲率テンソルのすべての成分がゼロであるというのは，幾何学的には Σ が「平面的に」埋め込まれており，はじめに Σ に接するようにスタートした測地線は Σ から絶対にはみ出さないという性質を持っていることを意味する．このような Σ は全測地的であるといわれる．

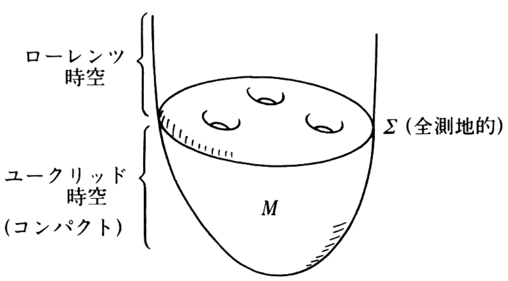


図4　宇宙の量子論的な無からの生成

以上をまとめると，トンネル効果による宇宙の無からの生成を半古典的に取り扱うならば，そのような時空は，全測地的に埋め込まれた空間的超曲面をお互いの境界に持つようなユークリッド時空とローレンツ時空で表されることになる．さらに Hartle-Hawking[12] の無境界条件を採用して，ユークリッド時空は境界のないコンパクトなリーマン多様体であるとしよう．そうするとこのような過程により生成された宇宙の波動関数を評価するには，通常の量子力学のときと同様に，ユークリッド化された Einstein 方程式の古典解を探し出しそれに対する作用を求めればよい．

（2）　量子論的な宇宙のトポロジー変化

ここでは四次元時空だけを考える．最近 Gibbons-Hartle[13] は上のような描像をもとに，ある物理的な仮定をおくと，生成される宇宙にはかなり強い微分・位相幾何学的な制限がつくことを示した．まずトンネル効果を表すユークリッド時空 M に注目する．彼らの課す物理的な仮定というのは，M 上のリッチテンソルが正である，すなわち任意のベクトル V^{μ} に対し $R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}\geq CV_{\mu}V^{\mu}$ (ここで $C>0$)であるという条件である．Einstein 方程式を使えばすぐわかるように，この条件は物質の（ユークリッド化された）エネルギー・運動量テンソルが，前の節で述べたようなエネルギー条件の一種を満足すべしというのと同等である．

彼らの結果の中で最も著しいものは次である．

定理4　以上の仮定のもとで，M の境界 Σ は連結でなければならない．□

証明は省略するが，結果は，リッチテンソルが正であるようなコンパクトなリーマン多様体上では二つのコンパクトな全測地的超曲面はお互いに

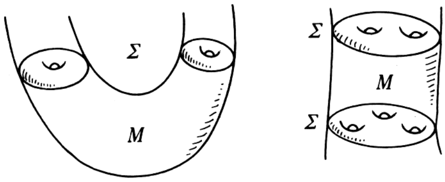


図5　宇宙の対生成とトポロジー変化

必ず交わらざるを得ないという微分幾何の定理から導かれるので，本質的なところで M のリッチテンソルが正であるという仮定を用いている．

この定理により，リッチテンソルが正であるという仮定のもとでは宇宙の「対生成」が禁止されることになる(図5左)．なぜならそのようなユークリッド時空 M の境界 Σ は非連結になるからである．さらに重要なことには，宇宙のトポロジー変化も同じようにして禁止されるということである(図5右)．前の節で，因果律と物質のエネルギー条件の物理的な条件を満足させる限り古典的には宇宙のトポロジー変化が起きないと述べたが，量子論的にみても物質のエネルギー条件に対応する仮定のもとではやはり宇宙のトポロジー変化は禁止される．

(3)　三次元重力モデル

しかしながら前にも述べたように，局所的には物質のエネルギー条件が量子論的に破れるということはありうるだろう．その最も極端な場合として，リッチテンソルがいたるところ負であるときには一体何が起こるのだろうか．これを四次元時空の場合について一般に調べるというのは容易ではない．最近，負の宇宙項のみを含むような三次元重力モデルにおいてこの問題がかなり具体的に調べられたので簡単に紹介しよう．

三次元重力においても Gibbons-Hartle の議論は同じように成り立つが，四次元の場合に比べて問題が以下のようにだいぶ簡単化される．まず宇宙項 Λ を含む Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Lambda g_{\mu\nu}=0$$

から直ちに $R_{\mu\nu}=-2|\Lambda|g_{\mu\nu}$ であり，いたるところでリッチテンソルは負であるようなモデルになっている．いま三次元時空を考えているので，このことはユークリッド時空 M が負の定曲率空間であることを意味する．これは物理的には三次元時空においては重力波が存在しないことに対応している．局所的な力学自由度がないので，三次元時空あるいは二次元宇宙の大域的な幾何やトポロジーだけに注目することができる．特に二次元宇宙はコンパクトで境界がないとしているので，よく知られているようにそのトポロジーは種数(genus)だけで完全に決められる．また，三次元の負の定曲率空間である時空 M のトポロジーや幾何学的性質は最近の三次元多様体論の発展によりかなりよくわかるようになってきている．中でも Thurston らの三次元双曲空間に関する仕事[14)]が具体的な時空の構成方法を得たりその性質を知る上で役に立つ．

例として種数2の宇宙が無から生成する過程を考えてみる．問題は図6に要約される．このようなトンネル効果を表す Einstein 方程式の解は，上に述べたように三次元の負の定曲率空間である．したがって問題は，種数2のリーマン面を全測地的境界 Σ に持つようなコンパクトな負の定曲率空間を構成するということになる．

構成方法

ここでは詳しいことを述べる紙面がないのでごく簡単にその解の構成を説明することにしよう．

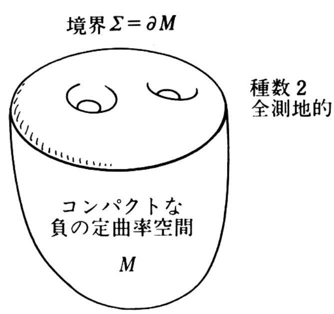


図6　種数2のリーマン面宇宙の生成を表すトンネル解

例えば三次元トーラスを作るには，三次元ユークリッド空間から切り出された直方体を用意し，その互いに向かい合う面同士を同一視すればよいだろう．いまの場合もこれと同じで，三次元双曲空間から多面体をいくつか切り出し，それらの面を貼り合わせていくというやり方で構成する．まず以下の構成方法が見やすくなるような，三次元双曲空間を表すモデルとしてクライン (Klein) モデル（あるいは projective model）と呼ばれるものを用いる．このモデルにおいては，無限に広がった双曲空間が三次元球面内にコンパクトに表され，双曲空間としての測地線や平面はユークリッド的な直線や平面と同じものとなる．ただし角度は正しく表現されていないことを注意しておく．このクラインモデルの三次元球内に図7のような四つの頂点を切り落とした正四面体を用意する．ここで，この切り落とし正四面体は以下のように双曲空間の特殊な性質を用いて特別に作られている．一つは，切り落とし面にあたる小さな三角形それぞれがそれと交わる三つの正四面体の面と直交しているということ．二つ目は，正四面体の面角が $\pi/6$ であること．(なぜそのような特別の正四面体を使うかは後で明らかになる.) さて，このような切り落とし正四面体を二つ用意する．そして図8上に描かれているような貼り合わせルールに従い，切り落とし正四面体の面（六角形になっている）を二枚一組にして貼り合わせる．すなわち A 面を A' 面にというように，また各面は矢印の辺がぴったりくるように同一視する．

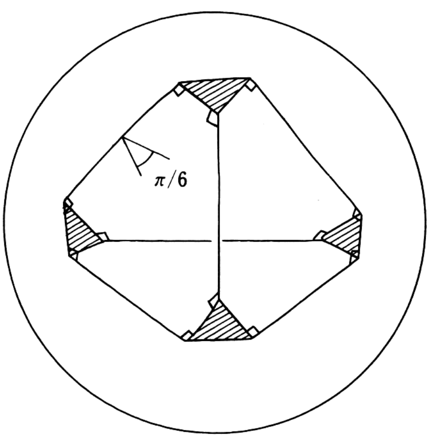


図7　双曲空間中の切り落とし正四面体

あなたがどちらかの切り落とし正四面体の内部に住んでいると想像していただきたい．そこからあなたが，例えば A 面に向かって歩いていったとすると，A 面と A' 面が同一視されているおかげで，A 面を突き抜けたらもう一つの切り落とし正四面体の内側に入り込むことになる．同じような散歩をすると，あなたは特別なトポロジーを持つ三次元空間の中をうろうろすることになる．そのうちあなたが気を変えて，切り落とし面の小さな三角形に向かって歩いていきやがてそこにぶつかったとすると，そこがこの三次元空間の境界である．貼り合わせルールに忠実に従えば，この境界面が実は種数2のリーマン面であることがわかるだろう．結果を図9に示したので読者自らこの貼り合わせゲームに参加されることをおすすめする．最終的にできあがったものは図8下に模式的に描いた種数2のリーマン面を境界に持つコンパクトな三次元多様体である．できあがりがきちんとした多様体になっていることは用意した切り落

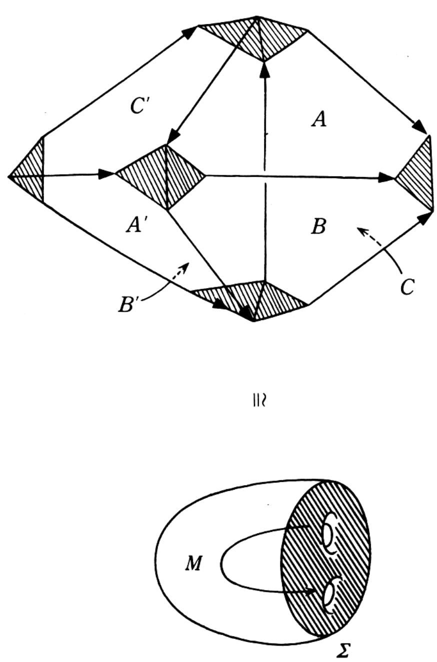


図8　切り落とし正四面体の貼り合わせルールとできあがり

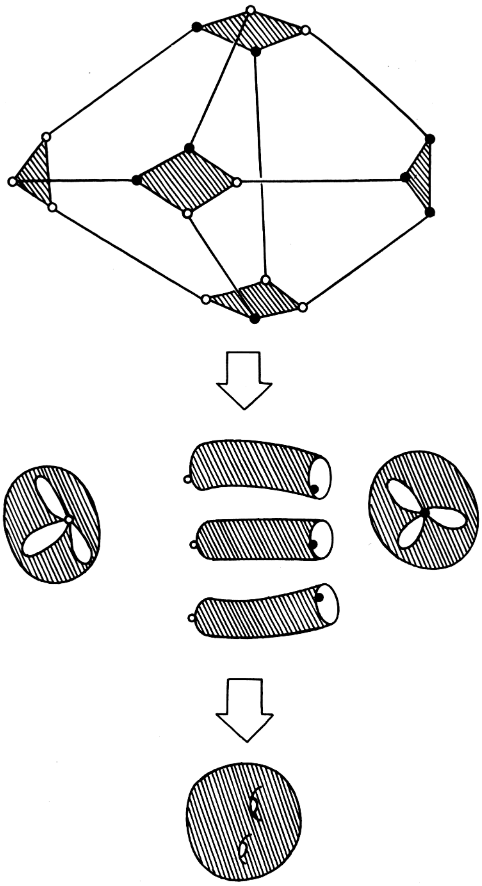


図 9　境界が種類 2 のリーマン面になること

とし正四面体の特別な作り方から保証される．正四面体のもとの辺 12 本は結局すべて同一視されて図 8 下に描いた矢印一本になるから，12 個の辺が集まってそのまわりをとりまくことになる．このためにもとの正四面体の面角は $2\pi/12=\pi/6$ としておいた．また，できあがりの多様体の境界面が滑らかなリーマン面になるために切り落とし面をうまく選んだわけである．

このようにして得られた三次元多様体は，その構成から明らかなように負の定曲率空間であるから，種数 2 のリーマン面宇宙の生成を表す Einstein 方程式の古典解が一つ得られたことになる．三次元双曲空間から切り出されたいくつかの多面体のこのような貼り合わせによって，これと同じ生成過程を表す無限個の異なる解が作れる．さらに，どんな種数 (≥ 2) のリーマン面宇宙の誕生を表す古典解も同じようにして作ることができる．

最後に，このような量子論的なトンネル効果により生まれた宇宙の波動関数を半古典近似で評価することについて簡単にふれる．宇宙の波動関数の経路積分表示は

$$\Psi[h]=\sum_{M}\int Dg\exp(-S_{\mathrm{E}}[g])$$

で与えられる．ここで h は空間的超曲面 Σ 上の二次元計量であり，S_{E} はユークリッド化された作用で次に与えられる（G は万有引力定数）．

$$S_{\mathrm{E}}=-\frac{1}{16\pi G}\int(R-2\Lambda)\sqrt{g}\,d^3x.$$

また経路積分は Σ を境界に持つようなユークリッド時空 M 上の滑らかな三次元計量 g 全体について行われ，M についての和は M の様々なトポロジーに関する足し上げを表す．Einstein 方程式の古典解に対する作用は，すぐわかるように

$$S_{\mathrm{E}}=\frac{1}{4\pi G}\frac{V}{\sqrt{|\Lambda|}}$$

となる．ここで V は古典解として構成された双曲多様体 M の $\Lambda=-1$ のときの体積である．したがって，より小さな体積を持つ双曲多様体に対応するトンネル解が波動関数により大きな寄与をすることになる．それでは，ある形（モジュライ）を持つ二次元宇宙の波動関数を半古典近似の範囲内で正確に求め，どのような宇宙の誕生が最も確からしいのかという疑問に答えることができるだろうか．残念ながらいまのところ，いくつかの数学的困難のためにこの問に完全には答えることができない．このことについて，また他のトポロジー変化を表すトンネル解の構成については文献 15) をみてほしい．

4. おわりに

1991 年の六月末に京都で開かれた第 6 回 Marcel Grossmann 会議の全体セッションの中で，少なくとも三人の理論家が宇宙のトポロジー変化に関連した講演を行った．そこではこのテーマをめぐって古典的あるいは量子論的な重力理論のいろ

いろな問題や可能性が指摘された．空間のトポロジー変化の取扱いは量子重力にとって挑戦的な問題であるばかりでなく，一般相対論の本質的な問題といくつか結びついている．また宇宙全体の大域的な幾何学的性質やトポロジーが，実際にどんな宇宙論的な影響を及ぼすかということも興味深い．今後，この古くて新しい問題をめぐるいろいろな新しい発展があると思われる．

追記：ごく最近の発展（1999年1月）

それでは，宇宙のトポロジーとしてどのようなものが可能であろうか．もちろん，この問題に対して一般的に答えることは難しいが，手がかりとなるものに三次元幾何学に関するサーストンによる予想がある．それによれば，閉じた三次元空間は，8種類の基本的な局所的に一様な閉じた空間（S^3, T^3, H^3, $SL(3, \boldsymbol{R})$, $S^2\times S^1$, $H^2\times S^1$, Sol, Nil）を断面が2次元球面であるチューブと断面が二次元トーラスのチューブでつないだもので尽きている．8種類のうちの1つの閉じた三次元双曲空間の分類が完成していないために，この予想は予想に留まっているがかなり確からしいと思われている．仮に正しいとすると，この予想に基づいた宇宙のトポロジーの分類が可能になるかもしれない．

上に述べた8つの部品である閉じた空間の宇宙論のなかの位置づけをしよう．実はこれらは伝統的な一様宇宙モデルにおけるビアンキ分類とカントフスキ＝ザックス＝成相宇宙に対応している．そのなかで，うまくコンパクトにできるものが上の8つの部品である．一様な宇宙のビアンキ分類は，標準的な事項でランダウ＝リフシッツの物理学教程の「場の古典論」にも記述があるが，これまでは空間の局所的な性質にのみ着目して分類をしていた．東工大のグループは一様でコンパクトな宇宙の大域的分類を行い，その力学を明らかにした[16]．力学的自由度を局所曲率に関するものと，大域的なタイヒミュラー変形の自由度にわけて考え，すべて数え上げた．

コンパクトな宇宙の時間発展を記述するために，さらに条件をつけ加える必要があることがわかり，タイヒミュラーパラメターの時間発展をアインシュタイン方程式の解を用いて表すことに成功した．

最後に，一様性を保持する変換により基本領域を，固定されたタイヒミュラーパラメターを持つ基本領域にマップすることにより力学的自由度をすべて計量に含ませることができた．これにより局所曲率と，大域的なタイヒミュラー変形の自由度の両方を記述するハミルトン形式が可能になった．

参考文献

1) J. W. Milnor and J. D. Stasheff, Characteristic Classes (Princeton University Press, Princeton, 1974)
2) R. D. Sorkin, *Phys. Rev.* **D33** (1986) 978.
3) J. W. Milnor, Topology from the Differentiable Viewpoint (University Press of Virginia, Charlottesville, 1965)
4) R. P. Geroch, *J. Math. Phys.* 8 (1967) 782.
5) F. J. Tipler, *Ann. Phys.* **108** (1977) 1.
6) S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, The Large Scale Structure of Space-time (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
7) P. Yodzis, *Gen. Rel. Grav.* **4** (1973) 299.
8) G. Horowitz, *Class. Quantum Grav.* 8 (1991) 587.
9) D. Gannon, *J. Math. Phys.* **16** (1975) 2364.
10) A. Tomimatsu, *Mod. Phys. Lett.* **A6** (1991) 1535.
11) A. Vilenkin, *Phys. Lett.* **117B** (1982) 25.
12) J. B. Hartle and S. Hawking, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 2960.
13) G. W. Gibbons and J. B. Hartle, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 2458.
14) W. P. Thurston and S. Levy, "Three-Dimensional Geometry and Topoloby", (Princeton University Press, 1997).
15) Y. Fujiwara, S. Higuchi, A. Hosoya, T. Mishima and M. Siino, "Nucleation of a Universe in (2+1)-Dimensional Gravity with a Negative Cosmological Constant", *Phys. Rev.* **D44** (1991) 1756; "Topology Changes in (2+1)-Dimensional Quantum Gravity", *Phys. Rev.* **D44** (1991) 1763.
16) M. Tanimono, T. Koike and A. Hosoya, *J. Math. Phys.*, **38**, 350 (1998). このなかに，以前の仕事が引用されている．

（ふじわら・よしひさ，郵政省通信総合研究所）
（ほそや・あきお，東京工業大学・理学部）

量子重力と弦理論

川 合 光

1. はじめに —— 量子重力の必然性

自然界の基本的な相互作用のうち，いまや重力以外のものはほぼ完全に理解されたといってよい．実際，電弱相互作用と強い相互作用が標準模型と呼ばれる場の量子論で記述されていることは，もはや疑う余地がない．また，クォークやレプトンの多重項の構造や，ゲージ場の結合定数のエネルギー依存性などを調べると，標準模型に現れるゲージ場が大体 10^{16} GeV，すなわち GUT スケール程度のエネルギーでは，統一されたものとして振る舞うことがわかっている．

他方，素粒子の間に働く重力は，通常のエネルギー領域では非常に弱いため，実験にはかからない．しかしながら，エネルギーがプランクスケール，すなわち 10^{19} GeV 程度になると，重力も他の相互作用と同程度の強さになることが簡単な考察からわかる．プランクスケールが上述の GUT スケールと大して変わらないということは，大体そのあたりのエネルギー領域ですべての相互作用が統一されていることを強く示唆している．すなわち，自然界には，10^{16} GeV から 10^{19} GeV 程度のところに基本的なスケールがあり，その低エネルギーでの有効理論として，標準模型と重力が観測されているにちがいない．

このような考え方は，決して単なる空想ではなく，ここ 10 年の量子重力および弦理論の発展により，しだいに現実味をおびたものとなってきている．いずれにしても，標準模型が完全に確立された現在，素粒子物理学の次の課題は，重力をも含んだ完全な統一理論を見つけだすことであり，そう遠くない将来に実現されると思われる．

2. 量子重力への 2 つのアプローチ：局所場と弦理論

現在のところ，重力の量子論を構成するための基本的な枠組として二つの異なるものが考えられる．その一つは，標準模型と同様に局所場の理論として重力の量子化を考えるものである．もう一つは，局所場ではなくて基本的に拡がったもの，すなわち弦理論として重力をとらえるものである．しかしながら，これらの二つのアプローチは必ずしも相反するものではなくて，理論を作りあげるための出発点だけのちがいであり，できあがったものは等価である可能性も大きい．例えば，11 次元の超重力を構成的に定義できれば，弦理論と等価になっている可能性もあるし，また，弦理論がある種の超対称ゲージ理論に関係した行列模型で表される可能性もある．ここでは一応，局所場として重力をとらえたときの問題点と，弦理論としてとらえたときの問題点を簡単にまとめておこう．

2.1 局所場としての量子重力

巨視的なスケールにおける重力がアインシュタインの作用

$$S = \kappa\int d^4x\sqrt{g}\,R+\lambda\int d^4x\sqrt{g} \qquad (1)$$

で非常によく表されていることは疑う余地がない．すなわち，微視的なスケールにおける重力がどのようなものであるにせよ，その低エネルギーでの有効理論はアインシュタインの作用になっているはずである．いいかえると，量子重力の問題とは，低エネルギーの有効作用が(1)になるような矛盾のない量子論を作れという問題である．それに対する最も素朴な試みは，作用(1)で表される場 $g_{\mu\nu}(x)$ を量子化しようとすることであろう．経路積分の言葉でいうと，それは次のようなグリーン関数を定義しようとすることである．

$$\langle g_{\mu_1\nu_1}(x_1)\cdots g_{\mu_n\nu_n}(x_n)\rangle = \frac{\int \mathcal{D}g\, g_{\mu_1\nu_1}(x_1)\cdots g_{\mu_n\nu_n}(x_n)e^{iS[g]}}{\int \mathcal{D}g\, e^{iS[g]}}.$$

このような量を系統的に計算する方法の一つが摂動論であるが，作用(1)がくりこみ可能ではないため，いまの場合摂動論は全く役に立たない．これをくりこみ群の見地から解釈すると，理論が仮にうまい具合に紫外固定点を持つとしても，それはガウス型固定点，つまり自由場からはかけはなれたものであり，自由場からの展開である摂動論が意味をなさないということである．いずれにしても，アインシュタインの作用(1)を量子化するためには摂動論を超えた定式化が必要であり，その一つの試みが，力学的単体分割による構成的定義である．これについては，3節および4節でくわしく述べることにして，ここでは量子重力のもう一つの可能性である弦理論について見ておこう．

2.2 弦理論としての量子重力

局所場の理論は点粒子を第2量子化したものであるが，点粒子の代わりに1次元的に拡がったものを考えるのが弦理論である．弦としては，輪ゴムのように端のないもの（閉じた弦）や，ウナギのように両端のあるもの（開いた弦）を考え，直観的にはそれらがぶわぶわと振動しながら，切れたりくっついたりしているような状況を考える．

局所場の理論は基本的に点粒子の理論であるから，量子力学的な中間状態として，いくつかの粒子がいくらでも近い距離にある可能性がある．実際，相互作用がくりこみ可能でなければ，そのような中間状態が圧倒的な寄与をするため，古典論に対する量子補正が無限大になってしまう．もちろん，2.1節で議論したように，理論を構成的に定義すれば，高次の量子補正がうまく相殺して，有限な結果を与える可能性もあるが，はじめからあまり近い距離を考えないようにしようというのが非局所場の考え方である．このような考え方は古くからあるが，不用意に拡がったものを考えると，因果律をこわしてしまったり，量子力学的な状態空間が正定値でなくなってしまうという問題が生じる．しかしながら，太さのない弦が切れたりくっついたりする系を考えると，このような問題のない健全な量子論を作ることができる．

弦理論はいまのところ，第1量子化のレベル，すなわち弦の有限多体系を扱うレベルではうまく定式化されている．実際，コンフォーマル場の言葉を使うと，矛盾のない弦理論であるためには，世界面上でどのような構造を持つべきかといった条件をうまく表現することができる．そのようにして調べると，一見，無限に多くの矛盾のない弦理論が存在するように見える．実際，10次元以下の時空で，重力場以外にいろいろなゲージ場や物質場を持った理論がまさに星の数ほど存在する．これらの理論は摂動論の有限次のオーダーでは安定であり，互いに独立であるが，非摂動効果まで考えるとトンネル効果などで結びついており，本当の真空はそれらの重ね合わせのようなものであると思われる．実際，この2～3年の発展により，少なくとも10次元の弦理論はすべて同一の理論の異なる真空であることが明らかになった．

いずれにしても，弦理論から物理的な予言を引き出すためには，非摂動効果を理解することが必

要であるが，それについては5節で議論する．

以上のように，量子重力にアプローチするには二つの見方があるが，先にも述べたようにこれらはおそらく独立なものではなくて，できあがった理論は等価である可能性もあると思われる．次節では，この二つのアプローチの両方のモデルとして，2次元の量子重力を考える．

3. 2次元の量子重力

3.1　2次元量子重力の意義

場の量子論を厳密に解くことは一般に不可能に近いが，時空が2次元であるような簡単な場合には，厳密解が得られて，それから高次元でも成り立つような新しい知見が得られることが少なくない．量子重力は概念的にも明らかでない点が多いが，2次元量子重力の厳密な結果を見ることによって，時空のゆらぎがどのようなものか理解を深めることができる．2次元量子重力は，4次元の量子重力のモデルであるという他に，弦理論の世界面のモデルにもなっている．例えば，物質場と結合していない2次元量子重力は，時空の次元が1であるような弦理論と等価である．ところで，前者は簡単な行列模型によって表されるが，それを使うと時空のトポロジーのたしあげを実際に遂行することができる．これは弦理論としては非摂動効果を厳密に計算したことになっており，1次元時空というきわめて特殊な場合ではあるが，弦の非摂動効果に対する知見が得られる．このような弦理論と行列模型の関係は，もっと現実的な場合にも成り立っているようであるが，これについては5節で議論する．

3.2　力学的単体分割の連続極限

重力場の量子論を構成的に定義する有望な可能性の一つが力学的単体分割である．すなわち，多様体 M 上の計量場 $g_{\mu\nu}(x)$ についての経路積分

$$Z=\int \mathscr{D}g\, e^{-S[g]}$$

の構成的な定義として，次のような和

$$Z_0=\sum_{T:\,\text{単体分割}} e^{-S_0[T]}$$

を考える．ここで T についての和は M を単体に分割するすべての可能なし方についての和である．ここでは各単体の一辺の長さは a として固定している．そうすると，単体分割 T を決めると，M は多面体とみなされ，その上の計量 $g_{\mu\nu}$ が定まることになる．その計量の持つ作用 $S[g]$ を $S_0[T]$ としたのである．また，一辺の長さ a は，通常の場の理論の構成的定義の際の格子間隔と同様なものであり，$a\to 0$ の極限が連続理論に対応すると考える．このように定義した理論が本当に一般座標変換に対して不変な理論になっているという厳密な証明はない．しかしながら，力学的単体分割を適用すると，多様体 M 上の各点の周りでいろいろなパターンの単体分割が独立に出現するため，連続極限では一般座標変換に対する不変性が出てくると期待される．このような予想が実際に正しいことは，時空が2次元のときは次のようにして具体的にチェックすることができる．

時空が2次元の場合，計量場 $g_{\mu\nu}(x)$ による経路積分はリューヴュー理論によって具体的に評価することができる[1]．ここでは多様体 M 上に中心電荷 c のコンフォーマル不変な物質場と結合した重力場を考え，次の経路積分

$$Z(A)=\int \mathscr{D}g\ Z_m[g]\delta\left(\int d^2x\sqrt{g}-A\right) \tag{2}$$

を計算してみよう．ここで，$Z_m[g]$ は計量 $g_{\mu\nu}(x)$ を持つ多様体 M 上の物質場の状態和であり，また，(2)の右辺のデルタ関数は，$g_{\mu\nu}$ で測った M の面積を A に固定することを意味する．(2)を評価するために，まずゲージをコンフォーマルゲージに固定する．すなわち，ゲージスライスを

$$g_{\mu\nu}(x)=\hat{g}_{\mu\nu}(\tau;\,x)e^{\phi(x)} \tag{3}$$

のようにパラメトライズする．ここで，$\phi(x)$ はコンフォーマルモードと呼ばれる場であり，τ はモジュライと呼ばれる有限個のパラメーターである．くわしいことは省略するが，これらを使うと(2)は結局

$$Z(A)=\int d\tau\int\mathcal{D}\phi\ \varDelta_{\mathrm{FP}}[\hat{g}]Z_m[\hat{g}]$$
$$\cdot\exp\left(\frac{c-25}{48\pi}S_{\mathrm{L}}[\hat{g},\phi]\right)\delta\left(\int d^2x\sqrt{\hat{g}}\ e^{\alpha\phi}-A\right) \tag{4}$$

と書けることがわかる．ここで，S_{L} はリューヴュー作用と呼ばれており

$$S_{\mathrm{L}}[g,\phi]=\int d^2x\sqrt{g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+R\phi\right)$$

で与えられ，α は

$$\alpha=\frac{1}{12}\left\{25-c-\sqrt{(1-c)(25-c)}\right\}$$

である．(4)で $\phi(x)$ を定数だけシフトしてみると，次のスケール則

$$Z(A)=Z(1)A^{-b\frac{\chi}{2}-1} \tag{5}$$

が得られる．ここで χ は2次元多様体 M のオイラー数であり，b は

$$b=\frac{1}{12}\left\{(25-c)+\sqrt{(1-c)(25-c)}\right\}$$

で与えられる．特に物質場がない場合は $c=0$ であり，$b=5/2$ である．

このようにして連続理論で(2)が計算できたわけであるが，これに対応する力学的単体分割も以下のように厳密に評価できる．簡単のため，物質場がない場合，すなわち $Z_m=1$ の場合を考えよう．そうすると，(2)に対応する力学的単体分割は

$$Z_0(A)=\sum_{T:\,M\text{の3角分割}}\delta_{n(T),A} \tag{6}$$

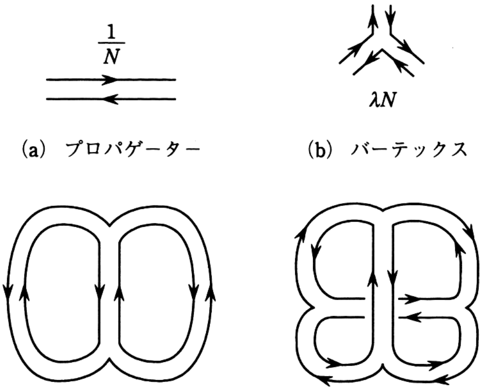
となる．ここで，T の和は M のすべての可能な3角分割についての和であり，$n(T)$ は3角分割 T に含まれる三角形の枚数である．いいかえると，上の $Z_0(A)$ は A 枚の三角形からなる M の3角分割が何通りあるかを示す数にすぎない．ところで，このような3角分割をたしあげるという問題は，次のような行列模型と等価である．実際，ϕ を N 行 N 列のエルミート行列として

$$\exp W=\int d\phi\ e^{-S(\phi)},$$
$$S(\phi)=N\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\phi^2-\frac{\lambda}{3}\phi^3\right) \tag{7}$$

で W を定義すると，W は

$$W=N^2w_2+N^0w_0+N^{-2}w_{-2}+\cdots$$

と書けるが，各 w_χ はちょうどオイラー数が χ であるような曲面のすべての3角分割について $\lambda^{\text{三角形の枚数}}$ という量をたしあげたものになっていることがわかる．すなわち，w_χ を λ で級数展開したときの λ^A の係数はオイラー数が χ の曲面の A 枚の三角形からなる3角分割のし方の数に他ならない．本当にそうなっていることを示すために，(7)に対するファインマン図を書いてみよう（図1）．すなわち，作用 $S(\phi)$ のうち ϕ について2次の項を自由場の作用とみなし，ϕ についての3次の項を相互作用とみなすのである．また，ϕ はエルミート行列であるから，プロパゲーターは行列の2つのインデックスに対応して図1(a)のように



(a) プロパゲーター　(b) バーテックス

(c) $O(N^2)$ の例　(d) $O(N^0)$ の例

図1　ϕ^3 行列模型のファインマン図．

2 重線で描くことにすると，tr ϕ^3 に対応するバーテックスは図 1 (b)のようになる．そうすると，各ファインマン図の値は $N^a\lambda^b$ となるが，ここで，b はバーテックスの数であり，a は

(バーテックスの数) − (プロパゲーターの数)
+ (インデックスループの数)

に等しくなる．例えば，図 1 の(c)は $N^2\lambda^2$ であり，(d)は $N^0\lambda^4$ である．次に各インデックスループを多角形のへりとみなし，プロパゲーターは多角形の辺どうしをはり合わせていると考えてみよう．すなわち，図 1 (c)は 3 つの二角形がはり合わさって全体として球面になっており，(d)は八角形と四角形がはり合わさって全体としてトーラスになっているとみなす．最後に，それらの双対グラフを考えると，(c)は球面の 2 枚の三角形からなる 3 角分割，(d)はトーラスの 4 枚の三角形からなる 3 角分割であることがわかる．このように双対グラフでみると，各ファインマン図の値は，確かに $N^{\text{オイラー数}}\lambda^{\text{三角形の枚数}}$ となっていることがわかる．

ところで，(7)のような積分はいろいろな方法で計算することができるので，(6)は厳密に求まる．その結果，十分に分割がこまかいとき，すなわち A が大きな値をとるときの(6)の振る舞いを調べてみると，確かに連続理論の結果(5)と一致していることがわかる．さらに，行列模型のいろいろな拡張を考えると，物質場を導入することができるが，それらの結果も本当に連続理論の結果(5)と一致することが確かめられる．この他にも，種々の量について知られているかぎりリューヴュー理論の結果と行列模型の結果はことごとく一致する．このことから少なくとも 2 次元の場合には，力学的単体分割が連続極限で一般座標変換に対する不変性を保証していることがわかる．

3.3 時空のフラクタル構造

時空が 2 次元の場合は，上のように量子的にゆらいだ計量場を構成的に記述できることがわかった．これを使うと，時空がどの程度ゆらいでいるかを表す量を次のようにして定義できる．まず，時空の中に 1 点 P をとり，そこから測地距離が D であるような点の集合 S を考える．もし時空が平坦な平面であれば S はもちろん半径 D の円にすぎないが，時空がでこぼこにゆらいでいれば，S は大小さまざまなループの集まりであろう．そのようなループのうちで長さが L と $L+dL$ の間にあるものの平均の個数を $\rho(D, L)dL$ としよう．物質場がない場合には，組み合わせ論的に力学的単体分割を調べたり，あるいは連続理論でうまくゲージをとることによって，厳密に $\rho(D, L)$ を計算することができる[2]．その結果はスケーリング変数 $x = L/D^2$ を使って

$$\rho(L, D)\times D^2 = \frac{3}{7\sqrt{\pi}}\left(x^{-\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}+\frac{14}{3}x^{\frac{1}{2}}\right)e^{-x} \quad (8)$$

と書くことができる．もし，時空が 2 次元で平坦であれば $L\sim D$ のようなスケール則があるはずであるが，いまの場合 $L\sim D^2$ になっていること，すなわちイフェクティブに次元が 3 次元的に見えることに注意しよう．このようにスケール則によって時空のフラクタル次元を定義することにすると，2 次元であった時空が量子ゆらぎによって 3 次元になっていると解釈できる．

場の理論におけるユニヴァーサリティ，すなわち連続極限が微視的理論の詳細には依存しないという性質は，力学的単体分割についてもあてはまると考えるのが自然であるが，(8)で与えられる ρ が実際にユニヴァーサルな量であることが，いくつかの数値計算によって確かめられている．いずれにしても，少なくとも 2 次元の場合，時空のゆらぎは自己相似的であり，フラクタル構造を持っている．このことは，もし 4 次元の量子重力が紫外固定点を持てば，時空の短いスケールでのゆらぎはフラクタル的であることを示唆している．

3.4 弦の世界面

上で見た時空のフラクタル構造は，コンフォーマルゲージ(3)の立場からすると，コンフォーマルモード $\phi(x)$ のゆらぎと解釈できる．一方，いままで考えてきた 2 次元時空を弦の世界面とみなす

こともできるが，そのときにはコンフォーマルモードに依存しない量が重要になってくる．いいかえると，局所スケール変換

$$g_{\mu\nu}(x) \longmapsto e^{\sigma(x)} g_{\mu\nu}(x)$$

に対して不変な量を調べることによって，上で見たフラクタル構造とは独立な量子ゆらぎを調べることができる．そのような量のうちで最も簡単なものとして，比抵抗を考えることができる[3]．すなわち，3角分割された面が与えられたとき，例えばそのデュアルグラフ，すなわち ϕ^3 理論のファインマン図を電気回路とみなし，各プロパゲーターを抵抗値が 1Ω の抵抗とみなす．知りたいのは，連続極限においてこれが確定した値の比抵抗を持った連続媒質に見えるかどうかである．このような問題は，弦理論を局所場の理論のある種の極限として表せるかどうかという問題にかかわっており興味深い．数値計算の結果は，物質場の中心電荷 c が $c \leqq 1$ のときは確かに連続媒質になっているが，$c > 1$ のときはそうでないことを示している．これは，$c > 1$ のときは世界面がきちんとした面ではなくて，無限に分岐したポリマー状になってしまうという予想とうまく一致している．また，同様の分析によって，(3)におけるモジュライ τ の量子ゆらぎも調べることができるが，これも $c \leqq 1$ のときは連続理論の結果とよく一致している．これらの結果は，面が分岐ポリマーになってしまわなければ，弦の世界面を行列模型のファインマン図とみなせること，すなわち行列模型が弦理論の構成的定義になり得ることを示唆している．

4．4次元の局所場としての量子重力

2節でも議論したように，問題は低エネルギーでアインシュタインの作用になるような紫外固定点があるかどうかである．最終的にこれに答えるためには，力学的単体分割などによって構成的に定義された理論が矛盾のない連続極限を持つかどうか調べる必要がある．いくつかのグループによって，3次元の場合と4次元の場合の力学的単体分割のモンテ・カルロ計算が行われている．理論に含まれるパラメーターを適当に選んだとき相関距離が無限大になれば，それが連続極限の候補になるわけであるが，残念ながらいまのところ見つかっている相転移はどれも1次相転移のようである．今後の発展が待たれる．

一方，最終的な解答にはなり得ないが，2次元のまわりの ε 展開は可能である[4]．この事情をもう少しくわしく考えるために，スピン系の場合の2次元のまわりでの ε 展開を思い出しておこう．具体的に $O(3)$ 対称性を持つスピン系を考えよう．その有効作用として，次の形の非線形 σ 模型をとる．

$$S = \frac{1}{2\lambda}\int d^D x\,(\partial_\mu \vec{s})^2. \tag{9}$$

ここで，$\vec{s}$ は $\vec{s}^{\,2} = 1$ を満たす3成分量であり，D は空間の次元である．重要な点は $D = 2$ のときは(9)はくりこみ可能であり，しかも漸近自由であることである．そうすると，$D = 2 + \varepsilon$ のときは β 関数は

$$\beta = \varepsilon\lambda - b\lambda^2 + \cdots \tag{10}$$

となる．ここで右辺の第1項は λ のカノニカル次元を表しており，第2項の符号が負であるのは $D = 2$ で漸近自由だからである．図2は(10)を図示したものであるが，これからもわかるとおり，ε が十分小さければ β 関数は紫外固定点

$$\lambda^* = \frac{\varepsilon}{b} + O(\varepsilon^2)$$

を持つ．ここで λ^* が ε のオーダーの量であることから，λ が λ^* の近くにいる限り摂動の高次は ε の高次でもあることに注意しよう．すなわち，摂動級数として求められたくりこみ群の関数に固定点 λ^* を代入したものは ε の級数とみなせるのである．ε が十分小さければこれでよいはずであるが，この議論だけからは実際に ε をどこまで大きくとってもよいかはわからない．しかしながら，スピン系では $D = 4$ が上限であることが他の考察からわかっている．結局，図2のような描像は ε が2より小さいときにのみ有効であることがわかる．

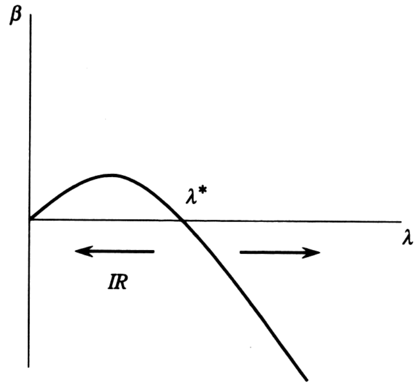


図2 $D=2+\varepsilon$ のときの β 関数.

アインシュタインの作用も上の場合と似た構造を持っている. 実際(1)と(9)はどちらも全体に微分を2つ含んでおり, 形式的な発散次数は同じである. また, アインシュタインの作用(1)で1ループの計算をしてみると, やはり $D=2$ で漸近自由であることがわかる. しかしながら, 計量場 $g_{\mu\nu}$ はトレース部分とトレースレス部分が異なるくりこみを受けるため注意が必要である. このため, スピン系の場合(9)とちがって, $D=2$ のときでも異常次元が残るという現象が起こるが, 矛盾なく扱うことができる. このような分析から ε が十分小さければ $2+\varepsilon$ 次元の重力は紫外固定点を持つといえる. しかし, いまのところ ε をどれくらいまで大きくとってよいかは不明である.

5. 弦理論としての量子重力

弦理論にははじめから紫外発散の問題はなく, しかも自動的に重力やゲージ場, 物質場を含むという著しい性質がある. しかしながら, 2節でも議論したように, 弦理論の本当の真空を調べるためには, 非摂動的な定式化が不可欠である.

最終的な構成的定義を作る試みとは少し性格が異なるが, この2年ほどの発展で弦の非摂動効果に対する理解がかなり深まってきた. 著しい結果として, 弦理論のソリトンが具体的に構成されたこと(D-brane と呼ばれる), 弦理論にも強結合・弱結合のデュアリティがあること, さらに, 10次元あるいはそれ以下の次元で一見異なる弦理論が, 11次元理論(M-theory)あるいは12次元理論(F-theory) の特別な真空としてある程度統一的に理解できるようになったことなどがあげられる. これらの結果は, それだけで弦理論の非摂動効果を定式化できるというものではないが, 正しい定式化を見つける際の大きな手がかりになると思われる.

最後に, 行列模型によって弦理論を構成的に定義しようという最近の試みにふれておこう[5]. 行列模型の作用として, 10次元の $SU(N)$ 超対称ゲージ理論を, 一辺の長さがゼロの周期的な箱に閉じこめたものを考える.

$$S=\frac{Na^4}{g^2}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{tr}[A_\mu,A_\nu]^2-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu,\psi]\right). \tag{11}$$

ここで, A_μ は10次元ベクトルであり ψ は10次元マヨラナ・ワイルスピノルであり, どちらも N 行 N 列のエルミート行列とする. このモデルはかつてゲージ理論の $N\to\infty$ の極限に関して考えられた large-N reduced model の超対称版であるが, 超対称のおかげで摂動論的には無限個の安定な真空を持つ. 特に, A_μ が互いに可換で固有値が一様に分布しているような真空のまわりの励起を調べると, IIB型の弦理論になっていることがわかる. このモデル(11)自身が最終的な構成的定義であるという決定的な証拠はまだないが, いずれ

にしてもこの種の比較的単純な行列模型によって目的が果たされる可能性は大いにありそうである．

6．おわりに

量子重力を記述する可能性として，一応，局所場からのアプローチと弦理論からのアプローチに分けて議論したが，必ずしもこれらは独立なものではなくて，理論がうまくできた暁にはどちらともみなせるものになっている可能性がある．例えば，弦理論を行列模型で定式化したとすると，おそらくそれはなんらかの局所場の理論である可能性が高いし，11 次元の超重力をうまく構成的に定義したものが M-theory である可能性もある．

どちらのアプローチにせよ，ここ 10 年の発展により，重力の量子論の完成はもはや手のとどくところまできているように思われる．

参考文献

1) H. Kawai, *Nucl. Phys. B.* (*Proc. Suppl.*) **26** (1992), 93.
2) H. Kawai, N. Kawamoto, T. Mogami and Y. Watabiki, *Phys. Lett.* **B306** (1993), 19.
3) H. Kawai, N. Tsuda and T. Yukawa, *Nucl. Phys. B.* (*Proc. Suppl.*) **47** (1996), 653.
4) H. Kawai and M. Ninomiya, *Nucl. Phys.* **B336** (1990), 115.
5) N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, プレプリント, hep-th/9612115.

（かわい・ひかる，高エネルギー加速器研究機構・理論部）

超弦理論とトポロジー

米谷 民明

1．はじめに：量子論とトポロジー

物理の理論のなかで，トポロジー的考察が欠かせない重要な役割を果した最初の目覚しい例は，筆者の知るかぎりでは，ディラック（P. A. M. Dirac）の磁気単極子（モノポール）の論文である．磁気単極子とは，例えば棒磁石のN極かS極の一方だけを単独に取り出したようなもの，つまり磁場の源としての磁荷を運ぶ粒子である．普通の電磁気学では，磁場は電流（電場の時間的変動によって作り出される変位電流も含めて）によってのみ作られるので磁荷は考えられない．これは経験事実に基づいた自然界の基本法則とされる．しかし，真空中の電場と磁場の力学は，電場と磁場について完全に対称的な形になっているのに，何故電場と磁場の源について，電荷は存在するが磁荷は存在しないという非対称性を自然が許しているのかは，昔から理論家の審美眼をくすぐる問題の種であった．

量子力学の時代に入ると，この非対称性の起源が，実は電子や陽子の波動関数（あるいは波動場）の位相因子の存在と密接な関係がある，ことがわかり，多少はこのミステリーについての理論は深まった．つまり，磁気単極子が存在しないことは，電磁場を表すテンソル $F_{\mu\nu}$ がベクトル場 A_μ によって $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ と書けること，したがって $\partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu}=0$ が恒等的に満たされることによる．ここで $\tilde{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ である．この形の $F_{\mu\nu}$ を特徴づけるのは，それが A_μ を任意のスカラー関数 λ によって $A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\lambda$ と置き換えても不変であるという性質，いわゆるゲージ不変性である．ゲージ不変性は波動関数の位相変換 $\psi(x)\to e^{ie\lambda(x)}\psi(x)$ のもとでの理論の不変性（この不変性は電荷の保存と同等）のために必要である（ここで e は電子の電荷）．それは，波動関数の異なった点での比較が，この要請のもとでは A_μ の存在によって初めて可能になるからである．

そうすると，量子力学の枠内では磁気単極子を考えることは，一見不可能にも思えてくるのだが，ディラックは，位相変換 $\psi(x)\to e^{ie\lambda(x)}\psi(x)$ は $\lambda(x)$ について

$$\lambda(x)\to\lambda(x)+\frac{2\pi n}{e}\qquad(n=\text{整数})$$

の不定性があることに着目して，電子の電荷 e と磁荷 g がもし $ge=2\pi n$（ただし，$\hbar=c=1$ という自然単位を用いている）の関係を満たすなら，磁気単極子が量子論の枠内で矛盾なく存在できることを示した．この議論を詳しく紹介しだすと，とても本題である，弦理論におけるトポロジーの役割に入れなくなるから，そのエッセンスだけを簡単に述べよう．

もし，磁気単極子が本当には存在しないとしても，できるだけ単極子の状態に近い状態を作ってみよ，という問題が与えられたとしよう．すると，

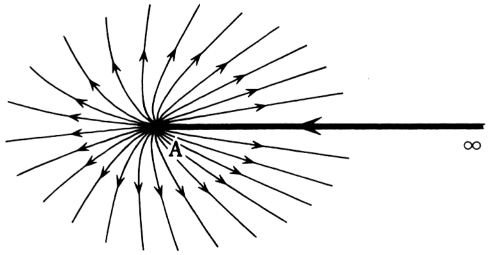


図 1　無限に細い磁場の束が 1 点(A)から放射状に出て行く．もし磁束 A ∞ が観測にかからなければ，これはまさに磁気単極子である．

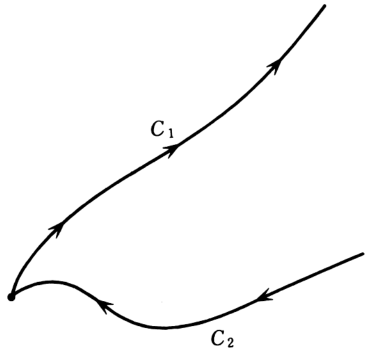


図 3　不連続ゲージ変換 $\lambda(x)$ によって生じる面 S_{12} の境界（C_1+C_2）に沿った無限に細い磁束．強さ $\dfrac{2\pi n}{e}$．

考えつくのは，できるかぎり細くて長い棒磁石を持ってくることであろう．もし，さらに棒自身はその端点を除いて，観測にかからないとすると，そのような状態はまさに磁気単極子であると言っても差しつかえないことになる．ディラックが示したことは，磁極につながった無限に細い棒磁石の中を通る磁場の束の位置や形が特異性を持つゲージ変換によって任意に移動・変形できることと同等である．これを見るために，図 2 のように磁場(A)から出ている無限に細い磁束を始めの位置(C_1)から別の位置(C_2)に移すことを考えよう．そうすると，C_1 と C_2 で囲まれる任意の面 S_{12} を想像できる．そこでゲージ変換を引き起こすスカラー関数 $\lambda(x)$ を面 S_{12} でその値が，ちょうど $\dfrac{2\pi n}{e}$ だけ不連続な飛びを持つものに選んでみよう．つまり，$\lambda(x)$ は S_{12} 上以外では至るところ連続で微分可能だが，S_{12} に上から近づくのと，その反対側（下側）から近づいたのでは値がちょうど $\dfrac{2\pi n}{e}$ だけずれているとするのである．このずれは上に述べた $\lambda(x)$ の不定さによって許されることに注意してほしい．また，この要請によって $\lambda(x)$ は必然的に C_1 と C_2 上では特異点を持つことになる．この特異点は，C_1 と C_2 に沿ってちょうど強さが $\dfrac{2\pi n}{e}$ の無限に細い磁束を生じさせる（これはストークスの定理から容易に証明できる．図 5 も参照）．図 3 参照．したがって，C_1 の磁束の強さ g がもし，$g=\dfrac{2\pi n}{e}$ を満たしていれば，図 2 と図 3 を重ね合わせれば容易に理解できるように，磁束 C_1 と C_2 に移動させる効果を引き起こす．

このように，ディラック条件を満たす磁気単極子の存在可能性は，ゲージ変換関数 $\lambda(x)$ の住む空間が周期 $\dfrac{2\pi}{e}$ の周期性を持つ空間，言い換えると半径が $\dfrac{1}{e}$ の円周のなす空間，であることによっており，ディラック条件に現れた整数 n は，円周から円周への写像の巻き数と解釈できる．実際，例えば C_1 を囲む一つの円周に沿って位置を動かしてみると $\lambda(x)$ は，半径 $\dfrac{1}{e}$ の円周をちょうど n 回巻きつくことはその連続性から容易に納得できる

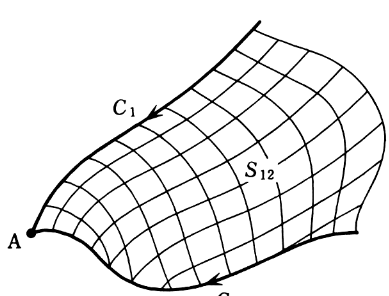


図 2　磁極 A から出る無限に細い磁束の二つの異なった可能性，C_1 と C_2．C_1 と C_2 によって囲まれる任意の面を S_{12} とする．磁束の強さは A の磁荷 g に等しい．

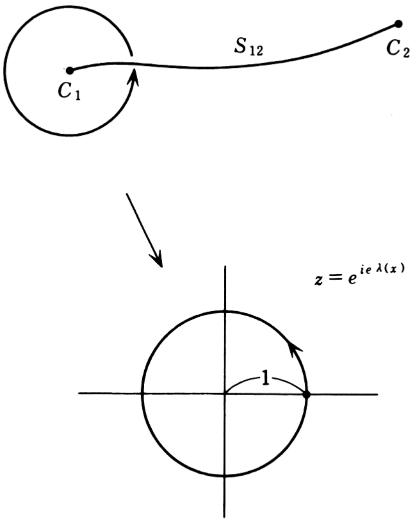


図 4　C_1 を囲む一つの円周上に沿って位置 x を動かしたとき，$z=e^{ie\lambda(x)}$ は単位円を n 周する．$n=$ 任意の整数．

(図 4 参照)．ディラック条件はこの写像のホモトピー群が $\boldsymbol{Z}$（整数全体のなす群）であることに相当している.（補足：この議論はすべての電荷が最小電荷の整数倍でなければ成立しないことに注意．ディラックは逆にこのことによって自然界の電荷の量子化を説明できると考えたのである.）

ディラックの磁気単極子の例を取りあげたのは，歴史的な意義からだけではなく，場の理論におけるトポロジーの役割に関して，その典型がここにすでに現れているからである．一般に，ある連続空間から別の連続空間への写像を考えると，その写像の局所的な性質の詳細によらない，大域的な性質があり，そのような大域的な性質を研究するのがトポロジーであると言うことができるであろう．場の理論や量子力学，したがってその融合である，場の量子論では特にそのような大域的性質が大変重要な意味を有することが，磁気単極子の問題から始って，様々な角度から明らかになって来ている．場は，時空から場が値として取る空間への写像であるし，一般に量子論では物理量のなす配位空間から，波動関数の値の取る空間への写像が考えられる．このことから，磁気単極子についての議論が色々の方向へ一般化できそうなことは，それほど想像しがたいことではないだろう．実際，場の理論や量子論において，トポロジー的構造が重要な意義を有する場合は，大別すると上に述べた 2 種類の写像の大域的構造に密接に関係している．前者が重要な役割を果たすのは，主に場のトポロジー的に非自明な古典的配位（トポロジー的励起状態と呼ばれる）の存在を示すときである．磁気単極子を初めとして，第 2 種超伝導体における磁束の渦糸，ヤン・ミルズ理論におけるインスタントン解，がそれに当たる．一方，配位空間から波動関数空間への写像に関するトポロジーが重要なのは，量子異常や，ベリーの位相，チャーン・サイモンズ（Chern-Simons）理論等においてである．これらについてのより詳しい内容については，本別冊号でもいくつか解説されているのでそちらを参照していただきたい．

2. 2 次元多様性のトポロジーと弦理論

さて，それではいよいよ弦理論におけるトポロジーの役割について考えてみよう．(超)弦理論の基本的仮定は，最もミクロのレベルでは物質粒子は大きさのない点（質点）ではなくて，太さのない一次元的にのみ拡がったひものようなものとしようということである．「太さがない」つまり「無限に細いひも」というと，多分読者は上で例として取りあげた，磁気単極子に結びついた無限に細い磁束のひものことを想起するに違いない．ディラックの場合は，それは単に単極子を量子論と矛盾せずに導入するために必要だった，非物理的（つまりゲージ変換によって勝手に移動・変形できるので観測にかからない）概念であるが，弦理論ではむしろ，それは最も基本的な意味での物質と運動の形態であると見なすのである．ついでに述べておくと，弦理論の初期には，ディラックの「ひも」を「実体」としての弦として見直そう，という考え方も追求されたとがあった．例えば超伝導体の中に磁気単極子が進入すれば，そのような状況を想像できる．余談はやめて先に進もう．

もし，上のようなひもの空間中での拡がりが十分小さければ，ひもは粒子と同じように振る舞うことが期待できる．場の量子論では，力とは粒子の放出や吸収によって生ずる相互作用として説明される．その様子は図5のようなファインマン図形によって表すことができる．粒子が本当はよりミクロに見るとひもであるとして，このような相互作用を表すことを考えよう．例えば，閉じたひもの運動は，時空中では図6のように筒によって表現できる．そうすると粒子の相互作用に相当する，ひもの世界膜図は図7のようなものが最も自然なものとして考えられる．この図で時刻がある一定値の断面を取り出すと，それがその時刻のひもの形になる．したがって，世界膜を時間変数の値を動かしながら，断面のひもの運動を追って行けば，ひもは様々にその形を変化させるのであるが，大局的な意味でのひもの変形，つまりトポロジーの変化は，ひもが途中で切れないという仮定をすると，ひもの2点がくっついて2本のひもに分かれる，ひもが全体として縮まってついに消えてしまう，のと，それぞれの逆の過程，の全部で4種類だけであることがわかる(図8)．しかし実はもしひも（粒子）が存在しない「真空」状態が正しく選ばれていれば，真空の安定性により，ひも（粒子）が真空からひとりでに現れたり，消えたりすることは禁止されるので，基本的なトポロジー変化は図8 Aの型だけということになる．もちろん，ひもの拡がりが無限に小さくなった粒子の極限を考えると，これは粒子の吸出または放出に対応するものである（図9）．

弦の理論と粒子の理論の違いのうちで最も重要な点は，世界膜図と世界線図のトポロジー的特徴の違いによって説明できる．例えば，図10のように粒子1と粒子2が互いに散乱される世界線図を考えよう．図AとBは，2点間PQまたはP′Q′を連続的に変えて互いに移り変わることはできない．それを無理やり行うおうとすると，PQ(P′Q′)がゼロになった別のトポロジーを持つ図Cを通過しなくてはならない．つまり，そのためには，粒子が一度に2個の粒子を放出または吸収するよ

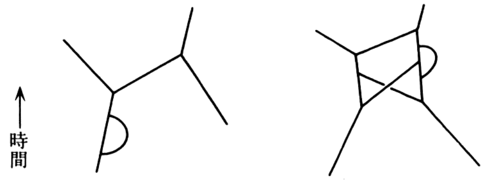


図5 粒子の放出や吸収によって粒子間の相互作用が生ずる様子を時空中の粒子軌道（＝世界線）の回路図によって示すファインマン図形．

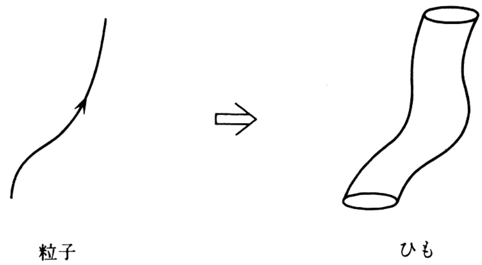


図6 ひも理論では粒子の世界線はひもの世界膜によって置き換えられる．

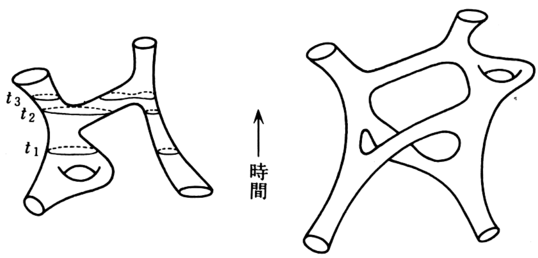


図7 図5の粒子の相互作用に対応するひもの世界膜図．左図 t_1, t_2, t_3 は異なった時刻ごとの断面を示す．

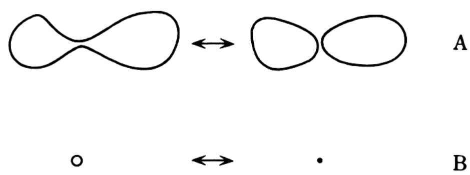


図8 ひもの2点がくっついたり離れたりする組み換え形のひものトポロジー変形(A)とひもの生成と消滅(B)．

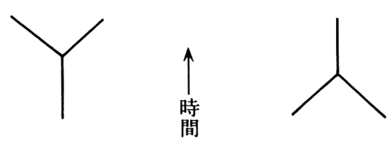


図9 粒子の放出または吸収に対応するファインマン図．

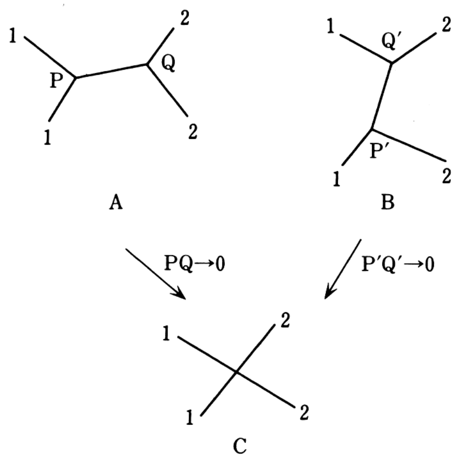


図 10　図 A から B へは図 C を通過しなければ連続的に移らない.

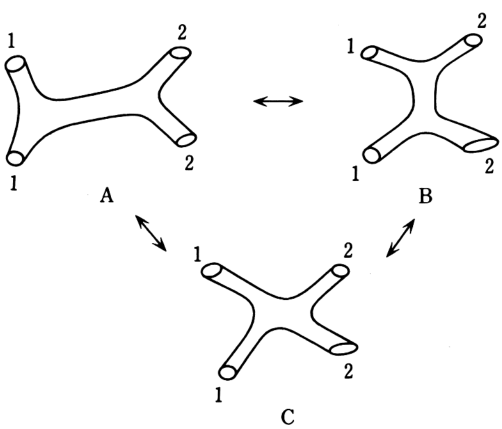


図 11　図 10 に対応する世界膜図.

うな相互作用を，図 9 の相互作用に加えて別に導入しなければならない．アインシュタインの重力理論では，このような意味で重力子の関与する無限に多くの種類の相互作用が存在する．同じことをひもの世界膜図について見てみよう．図 10 に対応するのは，図 11 である．この場合は，3 つの図 A, B, C はすべて互いに連続的に移り変わることができ，トポロジー的には A, B, C は本来区別するべきではないものである．これらの図は，球面に外線に対応する 4 個の穴をあけた 1 個の図で代表させることができる(図 12)．一般にひも理論の散乱を表す物理量（＝散乱振幅）は，トポロジー的に分類された世界膜図ごとに作られる．この性

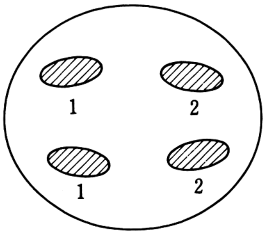


図 12　図 11 とトポロジー的に同等な 1 個の世界膜図．斜線部は球面にあけられた穴．

質はひも理論では双対性（duality）と呼ばれている．世界膜図は，局所的には（言い換えると，十分小さな任意の部分領域ごとに見ると）常に 1 枚の厚さのない円板面とトポロジー的に同じものである．したがって，多数の円板面を適当にはり合わせることによって，どんな世界膜も表すことができる．そのようにして構成される面は，2 次元の多様体と呼ばれる．したがって，ひも理論の散乱振幅の分類は，本質的には 2 次元多様体のトポロジー的分類と同等である．後者の問題は数学的には完全に解明されている．ここでは簡単のために「向きづけ可能」な多様体の場合に限って話を進めよう．（注：円板は常に向きづけ可能である．つまり円板上の 1 点を原点とする 2 本の軸を選びその向きを定めると，原点を移動することによって円板上の任意の点で向きづけを与えることができる．しかし，円板のはり合わせ方によっては，原点の移動によって自己矛盾せずに多様体全体の向きづけを定義できない場合がある．有名な例は，メービウスの帯やクラインの壺である．向きづけ不可能な面を考えなければならない弦理論もあるが，以下の話には何も本質的な点を加えることはないので触れない．）

向きづけ可能な 2 次元多様体（ただしコンパクトとする）は球面に p 個のハンドルをつけ，互いに交わらない r 個の円板の内部を取り除いたものとトポロジー的に同等（つまり同相）である．例えば，図 7 左図は $p=1, r=4$，右図は $p=3, r=4$ であるし，図 11 は $p=0, r=4$ である．粒子の極限を取った場合，p はファインマン図に現れる独立な閉回路の数，r は外線の数に等しい．粒子

の場合は p と r が決まっても，トポロジー的に異なった世界線図が数多くあり，それに応じて振幅を別々に構成しなければならないが，ひも理論では上に述べたように，トポロジーごとに振幅が決まるのである．これはひも理論の最も重要な特徴のひとつである．

ところで，粒子の場合もひもの場合も始めの状態(つまり時刻 $=-\infty$ における状態)と終わり(時刻 $=+\infty$) の状態が同じでも無数の異なった世界線図(ファインマン図)や世界膜図がある．言い換えると，r が与えられても p の値は非負の任意の整数値を取れる．もし時間を $-\infty$ から $+\infty$ まで連続に動かしてゆけば，これらの世界線図や世界膜図に対応して，許される粒子やひもの伝播と相互作用のありとあらゆる組み合わせが考えられる．量子力学を成立させるために最も基本的な要請である，確率の保存という性質（つまり，起こりうるすべての可能性ごとにその確率を足せば，常に総和は1であるということ）を満たすためには，可能なすべての世界膜図（粒子の場合は世界線図）に対応する振幅を適当な重みで足し合わせなければならないことを示すことができる．ひも理論の場合，この重みはただ1個の未定パラメーターを除いて一意的に決まっている．その不定さは振幅の強さが因子 $g^{-\chi(p,r)}$ だけ不定であると表すことができる．ここで g は任意の(実)定数で結合定数と呼ばれる．また，$\chi(p,r)$ は2次元多様体(ハンドル数 $=p$, 外線数 $=$ 穴数 $=r$)のオイラー標数であり，$\chi(p,r)=2-2p-r$ と書ける．オイラー標数は，多様体のトポロジー不変量（＝多様体のトポロジーだけによって決まる量）のひとつである．2次元多様体の場合は，χ を $\chi=\sum_I(-)^{d_I}$ と書くことができる．ここで I は時間パラメーターを動かして世界面の断面を見るときに起こるひもの相互作用（図8）を番号づけたものであり，d_I は図Aに対して $d_I=1$, Bに対して $d_I=0$ と定める．例えば，図7左については

$$\chi=-1-1-1-1=-4=2-2\times1-4$$

図7右については

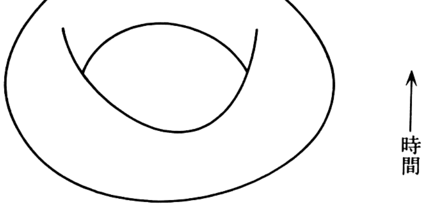


図13　ドーナツ型の世界膜図．真空のゆらぎを表す．

$$\chi=-1-1-1-1-1-1-1-1-1=-8$$
$$=2-2\times3-4$$

図11については

$$\chi=-1-1=-2=2-2\times0-4$$

また，ひもの生成と消滅による真空のゆらぎを表す図13のような場合は

$$\chi=+1-1-1+1=0=2-2\times1$$

等である．オイラー標数を，上のように世界膜の断面から見られるひも状態のトポロジー的変化によって表せることは，ひも理論におけるハミルトン的見方（物理的過程を時間に関する因果的発展として見る）と，時空全局的なラグランジュ的見方の整合性を示すひとつの例である．数学的にはより一般的なモース(Morse)理論の簡単な例になっている．

確率の保存則からは，単に，異なったトポロジーを持つ世界膜を加え合わせなければならないことを導けるだけではなく，個々のトポロジーを持つ振幅の特異点のふるまいを導くことができる．そのような特異性は世界膜図で言うと，トポロジーを変える極限的な変形が起こる場合に生じる．例えば，図11のAやBの中間の筒部分がくびれて，二つに分かれてしまう変形がそれに当たる．ひも理論の世界膜が，2次元多様体であるだけではなく，さらにリーマン面である場合には，確かにこのようなトポロジー変化に対応する変形が確率保存の要求と合致する特異点を生じさせることがわかっている．(注：リーマン面とは，各点で角度を変えない任意の座標変換，共形変換と呼ばれる，によって移り変わるものを同等と見なした2

次元多様体.）リーマン面の仮定は，それだけではなく，ひも理論にゲージ理論や一般相対性理論の対称性を持たせることになり，さらには通常の場の理論ではどうしても避けられない無限大（紫外発散）の問題を解決することをも可能にする．その場合，トポロジーの変化に対応する特異点以外では，振幅は世界膜の変形に対して滑らかに変化することが最も重要な性質である．以上のような意味で，2次元多様体，特にリーマン面のトポロジー的性質は，ひも理論の成立にとって，実に重要な役割を果していると言える．

3．トポロジー的励起とひも理論

いったん，リーマン面が与えられたとし，リーマン面上に乗ってものごとを考えると，リーマン面の各点は，時空に写像され時空の座標の値を持つ．したがって，時空はリーマン面上の場と見なすことができる．この写像のトポロジー的性質もひも理論では重要な意味がある．第1節の磁気単極子の例では，ゲージ変換関数 $\lambda(x)$ の周期性が重要であった．もし時空自身にそれと似た性質があると，トポロジー的に非自明な配位がひも理論にも存在しうることになる．ここでは，その最も簡単な例をあげよう．空間の次元のうちの一つが，円周である場合を考える．その座標を x とすると，円周の半径を R として，x と $x+2\pi nR$（n=整数）は同一視される．一方，リーマン面上の2次元座標を (τ, σ) とすると，x に対する「場」の方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\right)x(\tau, \sigma)=0$$

である．ここで，τ は時間の方向をパラメーター化してあるとすると，σ は閉じたひもの方向をパラメーター化することになるから，やはり周期性を持つ．ここでは σ と $\sigma+2\pi n$ を同一視できるように，パラメーターを選んであるとする．もし，σ が無視できるとすると，上式は $\dfrac{d^2}{d\tau^2}x=0$ となり，1次元の円周上を動く自由粒子の運動方程式に帰着する．後者の解は，τ の原点を適当にとれば，$x=p\tau$ と書ける．積分定数 p は粒子の運動量に当たる（ただし，簡単のため粒子の質量が1の場合を考えている）．ひもの場合，この解に相当する（特別）解は $x=p\tau+w\sigma$ と書ける．ここで w は新たな，ひも理論特有の積分定数である．しかし，x-空間の周期性のため，p と w は勝手な値を取ることは許されない．まず，p は，量子力学の初歩的考察から，$p=\dfrac{n}{R}$ と制限される．ここで，n は任意の整数．これは運動量 p の平面波 $\exp ipx$ が $x\to x+2\pi R$ に対して不変でなければならないことから導かれる．さらに，$\sigma\to\sigma+2\pi$ に対して x は空間の同一点の値をとらなければならないことから，$w=mR$（m= 任意整数）の制限が導かれる．m は，モノポールの場合とよく似た意味で，σ-空間から x-空間への写像の巻き数である．

ひも理論の場合，ひもの質量はひもの励起の仕方によって決まる．x の次元のひも質量（M）の2乗への寄与は

$$M^2=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\tau}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)^2\right]+\cdots$$

である（…は他の次元からの寄与）．したがって，上の解の場合，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n^2}{R^2}+m^2R^2\right)$ が x-空間からの寄与になる．ここで，第1項と第2項の寄与の積は R によらない整数になっていることに気がつくであろう．これはもちろん $pw=nm$ によっているが，この条件式はちょうど，モノポールの場合のディラック条件に相当するものである．また，質量の式は $R\to\dfrac{1}{R}$ の変換のもとで同じ形をしていることにも気がつくであろう．これは，普通の運動量の励起と，巻き数というトポロジー的励起が，空間の半径の入れ換えによって互いに移り変わり，対称的な役割を果たすことを示している．この現象は対称性の高い多くの物理系でよく見られるものであり，双対対称性と呼ばれる．前に真空中では電場と磁場の運動は対称的であると言ったが，それもこの双対対称性の最も簡単な例であ

る．さらにもし，電子（電荷 e）とモノポール（磁荷 g）からなる気体があるとすると，その静電磁エネルギーは

$$W=\frac{1}{8\pi}\left(\sum_{\text{電子}}\frac{e^2}{|x_i-x_j|}+\sum_{\text{モノポール}}\frac{g^2}{|y_i-y_j|}\right)$$

と書ける．もちろん，この他に運動に帰因するエネルギーへの寄与もあるが，それは e と g の積に依存し，電子とモノポールの入れ換えに対して対称である．$g=\frac{2\pi n}{e}$ を代入すれば，この式は $e\to\frac{2\pi n}{e}$ の置き換えのもとで対称的な形をしている．ひもの場合の $1/R$ の役割を果たしているのが，電荷の強さ e であることがわかる．

特に $R=\frac{1}{R}$ つまり，$R=1$ の場合は $R\leftrightarrow\frac{1}{R}$ の変換に対して不変で，自己双対であると言う．このとき系の対称性は，そうでないときに比べて飛躍的に高まる．この機構は，ひも理論に非可換群に対応するゲージ対称性が生じる原因のひとつである．また，一般に，$R\to\frac{1}{R}$ の対称性は上に説明した特別な解にとどまらない，より一般的な性質である．このことや，他の関連する性質から，ひも理論においては時空の，特に短距離の幾何学的見方に関して，粒子理論に基づく，ゲージ理論やアインシュタインの一般相対性理論と比べて根本的な見直しを必要とすることが予想される．（「他の関連する性質」は，前節で触れた紫外発散の解決と深い関係にある．）

以上はひも理論を 2 次元面（リーマン面）上の場の理論（共形場理論）と見立てたときのトポロジー的励起に関したことであるが，ひもの波動関数のトポロジー的性質に関連しても興味ある性質が，通常の場の量子論とのアナロジーによって種々考えられる．量子異常と指数定理のひも理論への拡張，ベリーの位相，等である．ここではもう予定の紙数を越えてしまったので，ディラックのモノポールのひも理論における対応物は何か，についてだけ簡単に触れることにする．

モノポールの場合，本質的であったのはゲージ変換と波動場（波動関数）の位相因子の関連であった．そこで，ひもの波動関数の位相因子の変換の自由度はどのようなものか，考えてみよう．それはひも相互作用の性質（図 8）と整合的でなければならない．このことから，ひもの波動場の位相の変換として許されるものは，ひもに沿っての線積分の形に書けなければならないことが導かれる．つまり，位相因子は

$$\exp i\oint\lambda_\mu(x)dx^\mu$$

の形をしている．この形だと相互作用の前後で位相因子が滑らかにつながることは容易に納得できるであろう．実際，向きづけ可能なひも理論の場合，その励起状態のなかには，反対称の 2 階のテンソル場 $B_{\mu\nu}(x)$ で表される状態が存在し，理論は全体として

$$B_{\mu\nu}\to B_{\mu\nu}+\partial_\mu\lambda_\nu-\partial_\nu\lambda_\mu$$

なるゲージ変換に対して不変であることが示される．この反対称場 $B_{\mu\nu}(x)$ が，不定な位相因子

$$\exp i\oint\lambda_\mu(x)dx^\mu$$

に対するゲージ場の役割を果たしているのである．$B_{\mu\nu}$ に対する，ゲージ不変な場の強さは 3 階反対称なテンソル $f_{\mu\nu\lambda}$，またはその双対場 f_μ（4 次元の場合）

$$f_\mu=\frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\partial_\nu B_{\lambda\sigma}$$

である．このことから，モノポールに相当するのは，特異性を持ったベクトルのゲージ変換関数 $\lambda_\mu(x)$ によって $B_{\lambda\sigma}$ の特異点の位置を移動できるもの，ということになる．モノポールの場合と同様にそのような特異性は

$$\oint\lambda_\mu dx^\mu\to\oint\lambda_\mu dx^\mu+2\pi n$$

の不定さによって可能であり，ゲージ不変な場の強さに対するビアンキ恒等式 $\partial_\mu f_\mu=0$（4 次元の場合）の破れによって表される．そのような特異領域の次元は d 次元時空では $d-4$ である．（モノポールの場合は $d-3$.）モノポールが磁束のひもの端点であったと同様に，この特異領域はモノポールの世界線の端点と言ってもよい（$d=4$ のと

き）．4 次元時空で考えるとこのような特異点は，ある時刻，位置に突然現れて直ちに消えてしまうものなので，「インスタントン」と呼ぶことができる．つまり，電子場に双対的な励起はモノポールであるが，ひもに双対的なトポロジー的励起はインスタントンである．このようなインスタントンが，ひも理論でどういう役割を果たすかについては，まだまとまった結果は得られていないが，これからのおもしろい研究課題のひとつであろう．また，$B_{\mu\nu}$ はひも理論における量子異常の問題においても重要な意味があることをつけ加えておこう．

4．おわりに：再び量子論とトポロジーについて

最後に，量子論とトポロジーの関連について，以上では触れ得なかったここ数年の進展につき一言だけ述べて結語としよう．

それは主に，1990 年度フィールズ賞を受けたウィッテン（E. Witten）によって発展させられたテーマであるが，物理的な観測可能量がトポロジー不変量だけであるような，量子力学や場の量子論の模型を考えることができることである．これは，以前にウィッテンが行った，モース理論と超対称性の関係に関する研究にその芽を見ることができるが，数学的には 4 次元のトポロジー不変量の構成にヤン・ミルズ理論を用いた，ドナルドソンの理論の「物理的説明」になっている．一方，物理の立場からは，場の理論において，時空幾何学の果たす役割，特に一般座標共変性の実現に対する新しい可能性の一つの例として注目に値する．このような「トポロジカル場の理論」は，いまのところは全くの数学的模型としかいいようのないものではあるが，前節で述べたようなひも理論における時空の短距離構造の問題にとっては，ヒントになりうる要素が含まれているかも知れない．また，2 次元時空の重力理論においては「普通」の理論との関係が次第に明らかにされている．特に興味深いのは，場の理論や超弦理論の安定性や紫外構造の「自然さ」を保証するために重要な「超対称性」とトポロジカル場の理論の対称性との間に密接な関係があることである．今後，トポロジカルな観測量と従来までの観測量の定義との関係を明確にすることを通じて，トポロジカルな場の理論が物理としてより現実味を帯びたものに発展する可能性があるように思われる．そうなれば，量子論とトポロジーの間の関係は全く新しい段階（物理の「トポロジー化」）に達することになる．

追記（1998 年 12 月）

3 節のおわりに触れた「インスタントン」やその親類に当たるような励起状態が，弦理論の最近（1995〜）の新しい展開において極めて重要な役割を果している．それにより，摂動論の計算ルールを越えた弦理論の全く新しい定式化への見通しが開きつつある．また，この稿が書かれた直後からの発展として，4 節でふれたトポロジカル場の理論に 3 節で述べた双対対称性の考え方を持ち込むことにより得られるトポロジカル場の理論の間の対称関係（ミラー対称性と呼ばれる）が重要であることも最後に付記しておく．

（よねや・たみあき，東京大学大学院総合文化研究科）

ブラックホールのエントロピー

細道 和夫

1. 序

ブラックホールの物理は，熱力学と非常によく似た面を持っている[1)]．特に事象の地平線の面積は時間とともに減少することはないとされ，これはブラックホールのエントロピーとみなすことができる．これはどういう意味だろうか．重力場を古典的に扱う立場からは，ブラックホールのエントロピーは事象の地平線内への粒子の落下によって失われた情報量を反映していると考えられるだろう．これに対して，重力を含めたすべての物理法則がユニタリーな理論によって記述できるとすると，情報の損失が起こる余地はないはずである．

超弦理論において最近，この問題に関する発見があった．超弦理論が重力を矛盾なく量子化した理論であるならば，ブラックホールのダイナミクスもユニタリーに記述されると考えられるが，そのためには，ブラックホールのエントロピーはたくさんの縮退した量子状態によって統計力学的に説明されるはずである．このアイデアが，1996 年はじめに，ついに現実のものになったのである[2)]．本稿では超弦理論の最近の話題にふれながら，超弦理論からみたブラックホールとはいかようなものかをお話ししたいと思う．

2. 超弦理論のソリトンと双対性

さて，ブラックホールのお話にはいる前に，近年の超弦理論の進展について概観することにする．超弦理論の強結合相を理解する強力な手段として，超弦の双対性という概念がある．これについては「数理科学」誌 1998 年 2 月号の松尾氏の記事も参照．超弦理論はもともとは摂動的に定義されており，量子異常のない超弦理論として 5 つの理論 (type I, IIA, IIB, および 2 つのヘテロ理論) があるが，超弦の双対性によればこれらは皆 1 つの理論の異なる記述にすぎない．超弦の双対性のなかには，2 つの超弦理論の間に摂動の各次数で成り立つもの（すなわち，超弦を超弦に対応づけるもの）と，そうでないものがあり，後者の場合には超弦そのものに加えてソリトン的な自由度を考慮してはじめて対応づけが可能になる．

このような背景から超弦理論のソリトンとして発見されたのが D-brane である[3)]．超弦理論において開いた弦を考えるときは，その境界条件としては Neumann 境界条件を課すのがふつうであるが，弦の座標のいくつかについて Dirichlet 境界条件を課すことにすると，弦の運動はあたかもその端点が時空内のある超平面上に束縛されているような振る舞いになる．この超平面が D-brane である．本稿では，空間的に p 次元の広がりを持った D-brane を Dp-brane と書くことにする．Dp-

braneの特徴の1つに，その張力（単位 p-次元体積あたりの質量）が g^{-1} に比例するというものがある．（$g = e^{\phi_0}$ は弦の結合定数で，ϕ_0 は dilaton の真空期待値．）よって D-brane は超弦の摂動論（$g = 0$ まわりのべき展開）においては空間内に固定された“重くて堅い”物体であるが，超弦の非摂動論では D-brane がダイナミカルな物体として時空を伝播すると自然に考えられる．今日では，このような超弦と brane たちの織りなす物理という描像で，特に type II 超弦理論の非摂動的振る舞いが理解されてきている．

D-braneが発見されたことにより，ブラックホールのいろいろな性質が超弦理論の言葉で鮮やかに説明されはじめたのである．以下の節では，超弦理論のなかのブラックホールとして最初に発見されたものの1つを説明することにする．

3. 超重力理論のブラックホール解

ここでは，5次元の $N = 8$ 超重力理論の荷電ブラックホールを，10次元の type IIB 超重力理論のブラックホール解から構成する[4]．超重力理論には重力場，ゲージ場のほかにたくさんの0質量の自由度が存在するので，そのまま現象論の理解につながるわけにはいかないが，解を求めると計量やゲージ場の表式はそのまま一般相対論のブラックホール解とみなせる形をしている．

10次元の type IIB 超重力理論には，次のボソン場がある．

graviton	:	g_{mn}
NS-NS 2-form	:	B_{mn}
dilaton	:	ϕ
R-R forms	:	$A^{(0)}, A^{(2)}_{mn}, A^{(4+)}_{mnpq}$

ここで記号 + は，R-R 4 form が自己双対な場の強さを持つことを表す．

高次元の超重力理論にはこのように高次の forms が存在するのであるが，粒子の worldline がゲージ場（1 form）と自然に結合するように，高次の forms には空間的広がりを持った物体の運動の軌跡（worldvolume）が自然に結合すると考えられる．つまり空間的に p 次元の広がりを持った物体（p-brane）は $(p+1)$-form ポテンシャルの源となり得るのである．超重力理論の枠内では，Dp-brane とは R-R $(p+1)$-form ポテンシャルの源となる高次元の物体をさす言葉とする．10次元の type IIB 超重力理論では，特に R-R 2 form の電気的および磁気的な源として，D1-brane（= D-string）および D5-brane を考えることができる．

10次元の type IIB 超重力理論は，上に述べたように self-dual な 4 form ポテンシャルを含むために，ローレンツ不変な作用による定式化はできない．ただし古典解について議論するときは，特定の場のみが値を持つので（特にフェルミ場はすべて値0をとる），ボソン場のみからなる簡便法的な作用を用いて議論することができる．あとの議論では D-string，D5-brane の束縛状態にあたるブラックホールを考えるが，このときはボソン場のうち metric, dilaton 以外では R-R 2 form のみが値を持つ．この場合，これらの場の満たす方程式は，次のような作用から変分原理で導かれるものになる．

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{16\pi G_{(10)}} \int d^{10}x \sqrt{-\hat{g}} \\
&\quad \times \left[e^{-2\phi}(\hat{R} + 4(\partial_m \phi)^2) - \frac{1}{12} H^2_{mnp} \right] \\
&= \frac{1}{16\pi G_{(10)}} \int d^{10}x \sqrt{-g} \\
&\quad \times \left[R - \frac{1}{2}(\partial_m \phi)^2 - \frac{1}{12} e^{\phi} H^2_{mnp} \right],
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
g_{mn} = e^{-\phi/2} \hat{g}_{mn},
$$
$$
H_{mnp} = \partial_m A^{(2)}_{np} + \partial_n A^{(2)}_{pm} + \partial_p A^{(2)}_{mn}.
$$

上式で $\hat{g}_{mn}$ は string 計量と呼ばれ，閉じた弦の0質量モードと直接関わる場である．第2段ではこれを Einstein 計量にうつして，重力場の作用を通常の形に規格化した．

Type IIB 超重力理論の解で，D-string と D5-brane の束縛状態とみなせるものを求める．特に，10次元の座標のうち $x_{5,6,7,8,9}$ に依存しない解は，

あとで次元削減して得られる5次元の理論のブラックホール解になる．このような解は，4つのパラメータ $r_0, \alpha, \gamma, \sigma$ もしくは，

$$
\begin{aligned}
&(r_0, r_1, r_5, r_n) \\
&= (r_0, r_0 \sinh\alpha, r_0 \sinh\gamma, r_0 \sinh\sigma)
\end{aligned}
$$

によって表される．Dilaton と string 計量は，

$$
\begin{aligned}
&e^{-2\phi} = e^{-2\phi_0} f_5 f_1^{-1}, \\
&ds^2_{(s)} = f_1^{-\frac{1}{2}} f_5^{-\frac{1}{2}} \\
&\times \left[-dt^2 + dx_9^2 + \frac{r_0^2}{r^2} (\cosh\sigma dt + \sinh\sigma dx_9)^2 \right] \\
&+ f_1^{\frac{1}{2}} f_5^{-\frac{1}{2}} [dx_5^2 + \cdots + dx_8^2] \\
&+ f_1^{\frac{1}{2}} f_5^{\frac{1}{2}} [h^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2_{(3)}], \qquad (2) \\
&r = (x_1 + \cdots + x_4)^{\frac{1}{2}}, \\
&h = 1 - \frac{r_0^2}{r^2}, \\
&f_i = 1 + \frac{r_i^2}{r^2} \quad (i = 1, 5, n).
\end{aligned}
$$

あらわには書かないが，上式に加えて，R-R 2 form とその field strength も値を持つ．この解は次のような D-brane の配置に対応している．

- D-string は $x_{0,9}$ 軸方向に，D5-brane は $x_{0,5,6,7,8,9}$ 軸方向に延びていて，ともに $x_{1,2,3,4}$ 空間の原点に位置する．
- D-string は $x_{5,6,7,8}$ 軸方向には一様に分布している．
- x_9 軸方向に運動量が励起されている．

5–トーラス T^5 上へのコンパクト化により，10次元の type IIB 超重力理論は5次元の $N=8$ 超重力理論になる．この理論は，27個の $U(1)$ ゲージ場および42個のスカラー場を含む．一般に超対称性の高い超重力理論には，U-duality と呼ばれるノンコンパクトな大域的対称性が存在する．このとき U-duality 群を G，そのコンパクト部分群を H として，$G_{\mathrm{global}} \times H_{\mathrm{local}}$ 不変な形に理論を定式化することができる．いまの $d=5$, $N=8$ 超重力理論の場合は $G = E_6$, $H = USp(8)$ であって，27個の $U(1)$ ゲージ場は E_6 の27表現に属し，42個のスカラー場は商空間 $E_6/USp(8)$ の座標とみなされる．これを量子化した超弦理論では U-duality 群は $E_6(\boldsymbol{Z})$ にまで破れていると考えられている．

27個の $U(1)$ 電荷は，もとの10次元の理論においては，(添字 μ, ν はノンコンパクトな5次元方向 $0, \cdots, 4$，i, j, k はコンパクトな T^5 方向 $5, \cdots, 9$ を表すとすると，)

$G_{\mu i}$	: T^5 方向の運動量
$B_{\mu i}$	: fundamental string の巻き付き数
$B_{\mu\nu}$	: NS 5-brane の巻き付き数
$A^{(2)}_{\mu i}$	: D-string の巻き付き数
$A^{(4+)}_{\mu ijk}$	: D3-brane の巻き付き数
$A^{(2)}_{\mu\nu}$	: D5-brane の巻き付き数

のような意味を持つものである．2 form のまじっているのは，5次元では 2 form は 1 form ポテンシャルに双対だからである．“巻き付き数”で表される電荷の担い手は，10次元でみれば弦や brane であるが，これらはコンパクトな T^5 の適当なサイクル上に巻き付いているので，5次元の理論では粒子にみえる．

10次元の時空のうち，$x_{5,\cdots,9}$ 方向をそれぞれ半径 $R_5, \cdots, R_9$ の円周上にコンパクト化し，すべての場の $x_{5,\cdots,9}$ 依存性を無視する．さきほどの10次元の解 (2) はこの次元削減によって，$d=5$, $N=8$ 超重力理論の解で，次の3種類の電荷を持つものになる．

Q_1 : x_9 軸方向の D-string の巻き付き数
Q_5 : T^5 上への D5-brane の巻き付き数
N : x_9 軸方向の運動量
(R_9^{-1} を単位とする)

これらの電荷はすべて整数値に規格化されている．

5次元の Einstein 計量の形は，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\lambda^{-\frac{2}{3}} h dt^2 \\
&\quad + \lambda^{\frac{1}{3}} (h^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2_{(3)}), \qquad (3) \\
\lambda &= f_1 f_5 f_n.
\end{aligned}
$$

このブラックホールの質量，エントロピー，温度をそれぞれ M, S, T とすると，

$$V \equiv R_5 R_6 R_7 R_8$$

として，$\alpha' = 1$ の単位系で，

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{R_9 V r_0^2}{2g} \\
&\quad \times (\cosh 2\alpha + \cosh 2\gamma + \cosh 2\sigma), \\
Q_1 &= \frac{V r_0^2}{2g} \sinh 2\alpha, \\
Q_5 &= \frac{r_0^2}{2g} \sinh 2\gamma, \\
N &= \frac{R_9^2 V r_0^2}{2g^2} \sinh 2\sigma, \\
S &= \frac{2\pi R_9 V r_0^3}{g^2} \cosh\alpha \cosh\gamma \cosh\sigma, \\
T &= (2\pi r_0 \cosh\alpha \cosh\gamma \cosh\sigma)^{-1},
\end{aligned}
$$

ただしエントロピーは事象の地平線の面積を A として，$S = A/4G_5$ のように定められる量である．

このブラックホールの特別な場合として，"極限"な場合を考えよう．ブラックホールの満たす性質に，宇宙検閲仮説というのがある．これはブラックホールの中心にある特異点は，必ず事象の地平線によって覆われているべしと言うもので，いまのような荷電ブラックホールの場合には，その質量の下限が電荷のある関数で与えられるというものになる．質量がこの下限値をとるものを極限ブラックホールという．一方，超対称性を持った理論においては，質量がセントラルチャージによって下から抑えられるという性質（BPS 下限）があるが，いまの場合には 2 つの議論により与えられる質量の下限は等しくなる．つまり極限ブラックホールは，破れない超対称性を持っていることになる．

上の式で与えられたブラックホールの場合には，r_0 が極限からのずれを表すパラメータであるとみなすことができ，極限ブラックホールは上の式で電荷（Q_1, Q_5, N）を固定して

$$
\alpha, \gamma, \sigma \to \infty, \quad r_0 \to 0
$$

の極限をとったものとして得られる．このときの熱力学量の表式は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{R_9 Q_1}{g} + \frac{R_9 V Q_5}{g} + \frac{N}{R_9}, \\
S &= 2\pi\sqrt{N Q_1 Q_5}, \\
T &= 0.
\end{aligned}
$$

5 次元ブラックホールの計量や極限ブラックホールの場合のエントロピーは，3 種類の電荷について対称な表式をしているが，これは 3 種類の電荷の入れ替えが U-duality 群に含まれているためである．

4. D-brane による記述

前節ではブラックホール解の古典的記述を与えたが，超弦理論においてこれと同じ質量と電荷を持つ状態を考えると，これは D-string, D5-brane と開いた弦の束縛状態にあたる．

簡単のため，極限ブラックホールの場合に話を限ることにする．前節にあげた，極限ブラックホールの質量の式

$$
M = \frac{Q_1 R_9}{g} + \frac{Q_5 R_9 V}{g} + \frac{N}{R_9} \tag{4}
$$

をみると，右辺の第 1 項，第 2 項はそれぞれ，x_9 軸方向に巻き付いた D-string および T^5 に巻き付いた D5-brane からの寄与である．さらに第 3 項は x_9 軸方向の運動量からの寄与であるが，この方向は D-string，D5-brane の両方に平行な方向であるから，運動量は brane 自身の並進運動によってではなく，これらの brane 上の励起によって担われる．このような D-brane の励起は，超弦理論では D-brane に開いた弦がくっつくことで現されるのである．さらに極限ブラックホールのときは，質量が BPS 下限値をとるべしという要請から，D-brane にくっついた開いた弦たちはみな質量 0 のモードにあり，すべて x_9 軸の同じ向きに動いていなければならないことがわかる．このようにして，互いに平行な複数の D-string と D5-brane があって，これらに平行な方向に開いた弦たちが同じ向きに運動しているという状態が，超弦理論のブラックホールであると言える（図 1）．

さて，D-brane 束縛状態上を運動する開いた弦の物理を調べてみよう．このためには，適当な境界条件のもとで開いた弦を第 1 量子化して，どのような 0 質量モードがあるかを調べればよい．い

まの場合は，開いた弦の 2 つの端点が D-string, D5-brane のどちらにつくかによって，4 通りの境界条件を持つ弦，すなわち (1,1), (1,5), (5,1), (5,5)-string を考える必要がある．0 質量モードの有効理論は D-string と D5-brane に平行な 2 次元の worldsheet (世界面) 上の理論であるとすると，これは 2 次元の $N=(4,4)$, $U(Q_1)\times U(Q_5)$ 超対称ゲージ理論になる．この超対称性を持った理論には，‘ベクター’，‘ハイパー’ という 2 種類の (超対称) 多重項があるが，0 質量モードの内訳は

$$\begin{array}{ll} (1,1) & \cdots Q_1^2\ (\text{ベクター}+\text{ハイパー}) \\ (5,5) & \cdots Q_5^2\ (\text{ベクター}+\text{ハイパー}) \\ \left.\begin{array}{l}(1,5)\\(5,1)\end{array}\right\} & \cdots Q_1Q_5\ \text{ハイパー} \end{array}$$

である．ゲージ群に関するそれぞれの多重項の変換性は明らかであろう．

ちなみに 2 次元の $N=(4,4)$ 超対称ゲージ理論というのは，わかりやすくは，$d=4$, $N=2$ あるいは $d=6$, $N=1$ の理論から次元削減で得られる理論である．上に現れた 2 種類の多重項は，6 次元の理論では

ベクター : one vector+*fermions*
ハイパー : four scalars+*fermions*

である．有効理論の次元削減は，もとの超弦理論では開いた弦の境界条件を変え，D-brane の次元を変える T-duality の操作と対応しているから，上の 6 次元の理論は D5-brane ($x_{0,\cdots,4,9}$), D9-brane ($x_{0,\cdots,9}$) の束縛状態の有効理論である．2 次元では，2 種類の多重項に含まれるボソン場はどちらも 4 個のスカラー場であるが，ベクター多重項のスカラー場は $x_{1,\cdots,4}$ 方向，ハイパー多重項のスカラー場は $x_{5,\cdots,8}$ 方向の振動モードと解釈できることがわかる．

さて，有効理論のあらわな形は超対称性などの要請から知ることができるが，ここではその定性的な性質に着目しよう．有効理論の基底状態は，スカラー場の真空期待値によってラベルされるが，いまの場合はベクター多重項のスカラー場が真空期待値を持つ場合と，Q_1Q_5 個のハイパー多重項のスカラー場が真空期待値を持つ場合の 2 通りに大別される．これはゲージ論の D-term と呼ばれる項の効果により，一方が凝縮すると他方が質量

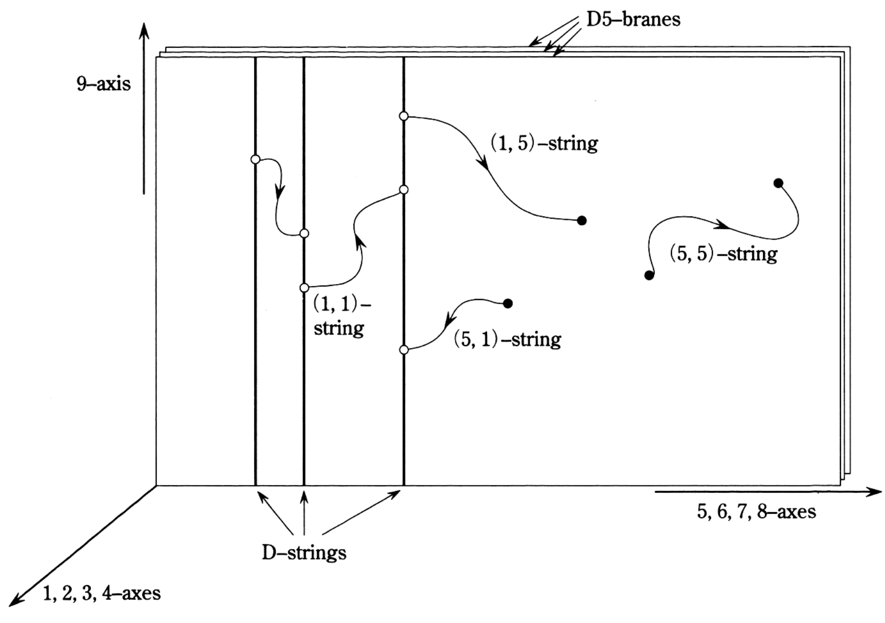


図 1　D-brane と開いた弦の束縛状態のイメージ図．向きづけられた開いた弦は 4 通りの境界条件を持つ．9 軸方向の運動量は開いた弦の 9 軸方向の運動によって担われる．

を持つようになるためである．前者の，ベクター多重項のスカラー場が凝縮する場合は，一般にゲージ群は $U(1)^{Q_1+Q_5}$ まで破れ，0 質量モードの数は Q_1+Q_5 のオーダーである．これは D-brane の描像では D-string や D5-brane たちがノンコンパクトな 4 次元 $x_{1,\cdots,4}$ の方向に互いに離れている相にあたる．これに対して後者の場合には，0 質量モードの数は Q_1Q_5 のオーダーであり，ベクター多重項が質量を持つようになる．この相は D-brane たちが重なっており，束縛状態をなしているとみなせる．

あとのエントロピーの評価の際には 0 質量モードの少ない相の効果を無視できる．そこで Q_1, $Q_5 \gg 1$ として後者の相に限って考えると，有効理論は $4Q_1Q_5$ 次元の多様体をターゲットとする 2 次元の超共形 (superconformal) シグマモデルである．ターゲット空間は実は，

T^4 上の $U(Q_5)$ ゲージ論の Q_1-インスタントンモジュライ空間，
すなわち，オービフォルド $T^{4Q_1Q_5}/S(Q_1Q_5)$
($S(N)$ は N 次の対称群)

であるが，これは D5-brane に重なった D-string は D5-brane に "溶け込んで" 5-brane 上のゲージ論のインスタントンになると考えられることによる[5]．(つまり，$x_{0,5,6,7,8,9}$ 方向に延びた D5-brane の世界面において，ゲージ場は x_0, $x_9=\text{const.}$ の任意の 4 次元面上でみたとき Q_1-インスタントンの配位になっており，そのモジュライが x_0, x_9 にゆるやかに依存する関数になっていると考えられるのである．)

ブラックホールのエントロピーは，この有効理論の BPS 励起状態で，運動量 N/R_9 を持つものを数えることで得られる．これは $c=6Q_1Q_5$ の CFT (共形場理論) の，レベル $L=N$ の状態数であるから，特に Q_1, Q_5 が固定され，N の大きい場合は CFT の状態数の漸近式

$$d \simeq \exp 2\pi\sqrt{cL/6}$$

より，次のようになる．

$$d=\exp S \simeq \exp(2\pi\sqrt{Q_1Q_5N}). \qquad (5)$$

この表式が，古典解からエントロピー面積則を用いて得られる表式と全く同じなのである．

なお，Q_1, Q_5, N の大小関係が上のようでない場合でも (5) 式が成り立つことが以下のようにして言える．

オービフォルド $T^{4Q_1Q_5}/S(Q_1Q_5)$ 上の CFT を考えるには，$T^{4Q_1Q_5}$ 上の CFT を通常の周期的境界条件に従って扱ったセクターに加えて，境界条件を $S(Q_1Q_5)$ の元でねじったセクターたちをすべて合わせ考えればよい．これらの twisted セクターのなかには，もとの Q_1Q_5 倍の周期を持つ T^4 上の CFT と同じになるものもある．このセクターからの状態数への寄与は，$c=6$, $L=Q_1Q_5N$ となって，やはり (5) 式のようになる．ほかのセクターからの寄与は，これに比べて無視できる．

これらの様々なセクターは，D-string と D5-brane の描像で考えるとわかりやすい．同じ巻き付き数を持った D-brane の束縛状態にも，巻き付き数 1 のたくさんの brane からなる場合や，1 個の brane が何回も巻き付いている場合など，いろいろな場合が考えられるのである[6]．上で考えた，周期が Q_1Q_5 倍になるセクターは，$(1,5)$-string の 2 個の端点がそれぞれ x_9 軸方向に Q_1 重に巻き付いた D-string と，Q_5 重に巻き付いた D5-brane にくっついている場合と考えられるのがわかる．(Q_1, Q_5 が互いに素でない場合にはこのように単純ではないが，そのようなときも x_9 軸方向の周期が実効的に Q_1Q_5 倍くらいとみなせるセクターは常に存在するから，本質的に議論は同じになる．) このように twisted セクターの寄与を考えることで，(5) 式の正当性は $Q_1Q_5N \gg 1$ であるような一般の電荷について言えたことになる．

5. 古典極限とブラックホールの大きさ

最後に，超重力理論，ゲージ理論の 2 つのアプローチがどのように関係しているか考えてみよう．

本稿でははじめに超重力理論の古典解を考えたが，これは閉じた弦の tree レベル（g 展開の最低次）で，かつ高次微分を含む項を無視した近似（α' 展開の最低次）にあたる．高次微分項を無視できるためには，古典解が弦のスケール $\sqrt{\alpha'}$ に比べて十分大きくなければならない．古典解のスケールは r_1, r_5, r_n で表されるとして，これらが $\sqrt{\alpha'}=1$ よりも十分大きいという条件は，電荷 Q_1, Q_5, N に対しては次のような条件になる．

$$gQ_1 \gg 1, \quad gQ_5 \gg 1, \quad g^2N \gg 1 \qquad (6)$$

ただし $R_{5,\cdots,8} \sim \sqrt{\alpha'}=1$ とした．したがって gQ_1, gQ_5, g^2N を固定して $g \to 0$ とする極限を古典極限とすると，上の条件 (6) の成り立つ場合はブラックホールを超重力理論の古典解とみるのがよい近似である．

これに対して D-brane 世界面上のゲージ論によるアプローチは開いた弦の理論の tree 近似にあたるが，開いた弦のループ補正が小さいための条件は，実は次のようになる．

$$gQ_1 \ll 1, \quad gQ_5 \ll 1, \quad g^2N \ll 1. \qquad (7)$$

最初の 2 つの条件は，開いた弦の世界面に穴があくことで種数（genus）が増える場合，穴の縁はくっつく D-brane を選ぶ自由度があるためである．最後の条件は，開いた弦の世界面がだいたい N に比例する枚数の離れた部分からなっているとして，ハンドルをくっつけることで種数を増やす場合の“くっつき先”を選ぶ自由度のためと考えられる．したがって，D-brane と開いた弦による描像がよい条件 (7) は，条件 (6) と交わりを持たないことがわかる[7]．

6. その後の進展

本稿に説明したアイデアは，ブラックホールの持つほかの様々な熱力学的振る舞いにも試されてきている．

まず，エントロピー公式の D-brane による説明が極限をはなれたブラックホールや角運動量を持った場合にも試みられている．一般に極限をはなれた場合には量子補正の効果が予想されるが，極限からのずれが小さくない場合でも，D-brane による描像が驚くほどよいことが確かめられている．

さらに，極限をはなれたブラックホールからのホーキング輻射を，D-brane 上での開いた弦の衝突による閉じた弦の生成過程として説明する試みも，非常に成功している．

また最近では，11 次元超重力の量子論である M-theory とその Matrix 模型が研究されてきているが，ブラックホールの諸性質をこの新しい理論の枠内で説明する試みも盛んである．

ブラックホールの不思議は人々を長年悩ませてきたが，謎の解明に向けて大きな一歩が踏み出されたと言ってよいだろう．

参考文献

1) J. Bekenstein, Black holes and entropy, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 2333; Generalized second law of thermodynamics in black hole physics, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3292; S.W. Hawking, Black holes and thermodynamics, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 191.
2) A. Strominger and C. Vafa, Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy, *Phys. Lett.* **B379** (1996) 99, hep-th/ 9601029.
3) J. Polchinski, Tasi Lectures on D-branes, hep-th/ 9611050.
4) C. Callan and J. Maldacena, D-brane approach to black hole quantum mechanics, *Nucl. Phys.* **B472** (1996) 591, hep-th/ 9602043.
5) M. Douglas, Branes within branes, hep-th/9512077.
6) J. Maldacena and L. Susskind, D-branes and fat black holes, *Nucl. Phys.* **B475** (1996) 679, hep-th/ 9604042.
7) J. Maldacena and A. Strominger, Black hole greybody factors and D-brane spectroscopy, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 861, hep-th/ 9609026.

（ほそみち・かずお，東京大学大学院理学系研究科）

V. 重力場の量子論

ミラー対称性

細 野　忍

1. はじめに

重力を含む統一理論として注目を集めた超弦理論は，その可能なモデルの多さ由，当初期待された“統一理論の一意性”を失いいまではかつて見られた熱狂は過去のものとなってしまっている．しかし，このモデルの多様性は超弦理論を数理モデルとしてみるならばそれが豊富な構造を持つことを意味する．カラビ・ヤウコンパクト化のモデルで発見されたミラー対称性[1]は，そうした構造の一つと言えよう．ミラー対称性から導かれる量子コホモロジー環は，代数幾何学にこれまでなかった新しい視点と研究の動機を与えている．

整合性のある超弦理論を作るには，時空は10次元でなければならない．しかし，これは重力を含む統一理論が問題とする10^{-33} cmというスケールでの話で，現在我々が問題とする電弱統一理論のスケール10^{-16}～10^{-17} cmでは，余計な6次元はコンパクトな多様体に曲げ縮められていると考える．曲げ縮められた6次元の様子は，観測される多様な素粒子とそこに見られる対称性を通して間接的に観察することができる．多様体への曲げ縮めの手法の一つが，カラビ・ヤウ多様体へのコンパクト化である．

カラビ・ヤウ多様体は，ケーラー多様体でその接束の第1チャーン類が0となるもので，かつ自明な基本群を持つ複素n次元多様体である．超弦理論のコンパクト化からは，最後の自明な基本群についての条件は出て来ないが，ここではこの条件も加えておくことにする．さて，様々な複素3次元カラビ・ヤウ多様体を用いて超弦理論のコンパクト化を行うと，それに応じて異なった素粒子モデルが導かれることになる．素粒子モデルは，理論の基底状態の様子によって特徴付けられるが，これはカラビ・ヤウ多様体の位相不変量によって決まることになる．複素多様体の最も基本的な不変量は，ホッジのコホモロジーによって決まるホッジ数と呼ばれる数で，これを用いて素粒子の世代数が決まることになる．次に，ホッジのコホモロジーで正則，反正則共に1次である(1,1)型微分形式を3つ用いて作る3次の線形形式が存在する．これは素粒子の相互作用を表す量である湯川結合を作ることがわかっている．この他に，第2チャーン類と(1,1)型微分形式の積を積分して作る線形形式が存在するが，これは最近の研究で超弦理論の1ループからの補正に登場することがわかっている[2]．実は，以上の3つの不変量の他に3次元カラビ・ヤウ多様体が持つ(独立な)位相不変量はないことが知られており，これらが超弦理論の基底状態の様子を決めることになる．

さて，3次元カラビ・ヤウ多様体はいったいどれ程存在するであろうか？　残念ながら，数学者はまだそれに対する答えを得ていない．超弦理論のコンパクト化の必要から，物理学者のグループはこの問題に取り組み，例えば重みつき射影空間

の超曲面として与えられるカラビ・ヤウ多様体は，7,555種類に限られることをコンピュータを用いた解析で見つけている[3]．その他，完全交叉型と呼ばれるものも含めるともっと多くのものが存在することもわかっている．図1では，超曲面型のものに限り，7,555の多様体Mについて，横軸にオイラー数

$$\chi = 2(h_{11}(M) - h_{21}(M)),$$

縦軸に

$$h_{11}(M) + h_{21}(M)$$

をプロットしたものである．ここで，$h_{11}(M)$, $h_{21}(M)$はそれぞれMの(1,1)型および(2,1)型コホモロジー類の数(ホッジ数)である．図1を見ると，プロットの様子が縦軸についてきれいに左右対称になっていることがわかる．このことは，ホッジ数の間に

$$h_{11}(M) = h_{21}(W),$$

$$h_{21}(M) = h_{11}(W)$$

という関係を持つようなカラビ・ヤウ超曲面の対ができていることを意味する．実は，図1をよく見るとこうした対を作らない超曲面もあることがわかるが，ほとんどの超曲面Mには対を作るパートナーWが存在していて，この現象はいまではミラー対称性と呼ばれている．なぜ，カラビ・ヤウ超曲面はこの不思議な対を作って現れるのであろうか？　この謎の解明について，最近多くの物理学者・数学者らによって研究が行われ，興味深い成果が数多く得られている．

2．ミラー対称性とトーリック多様体

図1に現れる不思議な対称性，ミラー対称性，についての1つの説明は，共形場の理論と結び付けることによってすることができる．図1に示される超曲面のモデルには，いろいろなタイプの超曲面が含まれているが，その中でフェルマー型と呼ばれるものが147個ある．実は，このフェルマー型超曲面のモデルは，共形場の理論から作るGepnerモデルと呼ばれるものと離散的対称性が完全に一致することが知られており，両者は同一な超弦理論を与えていると考えられている．共形場の理論から作り上げる超弦理論には，位数2の群が作用する．これは，共形代数が電荷と呼ばれる量子数を持ち，これについて位数2の自己同型を持つことに由来する．この自己同型を使うと，超弦理論が常にペアーを組んで構成されることがわかり，その構成法はorbifold構成として知られている[4]．こうして作られるペアーが，超曲面との対応を作るときに図1に見られる対称性となる．

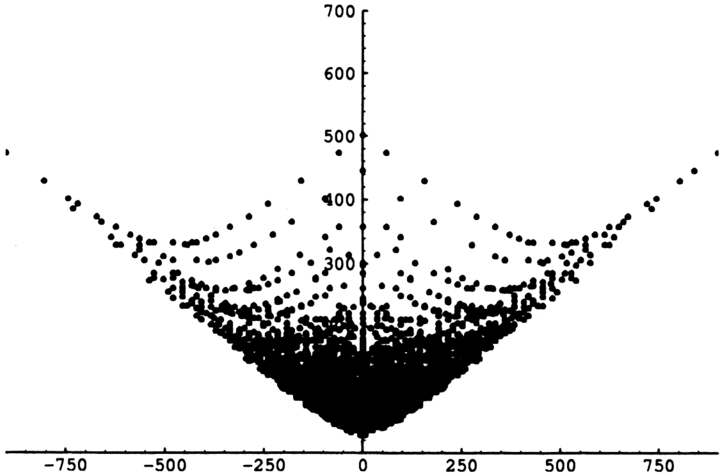


図1　7,555個のモデルのプロット．横軸はオイラー数 $\chi = 2(h_{11} - h_{21})$，縦軸は $h_{11} + h_{21}$．

それでは，共形場の理論との関係がこのようによくわかっていない残りのモデルについては，どのようにミラー対称性の説明を与えることができるだろうか．それについての答えを与えたのは数学者 Batyrev である．彼は，7,555 個のカラビ・ヤウ超曲面が，トーリック多様体を ambient 空間として用いると，系統的に構成されることに着目し，ミラー対称性を見事に説明したのである[5]．

Batyrev の構成の概略を説明するために，フェルマー型超曲面のモデル $X_d(\omega)$：

$$z_1^{d/\omega_1}+z_2^{d/\omega_2}+z_3^{d/\omega_3}+z_4^{d/\omega_4}+z_5^{d/\omega_5}=0 \tag{1}$$

を考えよう．ここで記号 $X_d(\omega)$ は，超曲面が重みつき射影空間 $\boldsymbol{P}^4(\omega)=\boldsymbol{P}^4(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_5)$ の中で，次数が d である(重みつき)斉次多項式によって与えられていることを示す．重みつき射影空間とは通常の射影空間を一般化したもので，次のように定義される．

$$\boldsymbol{P}^4(\omega) = (\boldsymbol{C}^5\backslash\{0\})/((z_1,z_2,z_3,z_4,z_5) \sim(\lambda^{\omega_1}z_1,\lambda^{\omega_2}z_2,\lambda^{\omega_3}z_3,\lambda^{\omega_4}z_4,\lambda^{\omega_5}z_5)) \quad (\lambda\neq 0)$$

ここで，$z_1,z_2,\cdots,z_5$ を(重みつき)斉次座標と呼ぶ．また，第 1 チャーン類が消える条件を考えると，

$$d=\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_5$$

でなければならないことがわかる．

さて，一般に多変数の多項式

$$F=\sum_{m_1,m_2,\cdots,m_n} C_{m_1m_2\cdots m_n}z_1^{m_1}z_2^{m_2}\cdots z_n^{m_n} =\sum_m C_m z^m$$

に対して，それのニュートン多面体 $\varDelta_F$ は，集合 $\{m\in\boldsymbol{Z}^m|C_m\neq 0\}$ の凸閉包として与えられるが，Batyrev は先ず超曲面の定義方程式(1)に対するニュートン多面体を考える．さらにこれを，ベクトル $(-1,-1,\cdots,-1)$ によって平行移動を行った後，次の多面体を作る．

$$\varDelta(\omega) =\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_5)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{5}\omega_i x_i=0,\ x_i\geq -1 \quad (i=1,2,\cdots,5)\right\} \tag{2}$$

この多面体は，モデル $X_d(\omega)$ を構成するのに必要な量をすべて含んでいることがわかる．その上，ミラー多様体 $X_d^*(\omega)$ も多面体 $\varDelta(\omega)$ から作り上げることができることを Batyrev は発見したのである．それを可能にする性質は，多面体 $\varDelta(\omega)$ が reflexive な多面体という特別なものになっていることである．

凸多面体の幾何学で，原点をその内部に含む n 次元凸多面体 P に対して，双対な凸多面体 P^* が存在することが知られている．いま，P の頂点を $n_1,n_2,\cdots,n_s$ とするとき，各頂点は

$$H_i=\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\langle n_i,x\rangle=-1\}$$

によって双対な超平面を決めるが，これらの取り囲む領域として，双対な多面体 P^* は定義される．頂点と面の対応は，例えば P の n_i,n_j を両端とする辺に対しては，超平面の交わり $H_i\cap H_j$ を対応させるなどによって，結局 P の r 次元面と P^* の $(n-r-1)$ 次元面が対をなすことになる．

さて，Batyrev は $\varDelta(\omega)$ に対してその双対 $\varDelta^*(\omega)$ を作ってみると，すべての頂点が再び整数点になる(reflexive)という顕著な性質を持っていることに気付いたのである．$\varDelta(\omega)$ の頂点は，定義からすべて整数点で与えられるが，$\varDelta^*(\omega)$ の頂点は $\varDelta(\omega)$ の最高次元(3 次元)面の各頂点に対する双対な超平面の交わりとして決まるから，一般には有理数で与えられる．したがって，この reflexive という性質は特別な凸多面体の持つ性質であることが理解されるであろう．また，自然に $(\varDelta(\omega)^*)^*=\varDelta(\omega)$ であるから，多面体とその双対多面体は同等に取り扱われるものであることがわかる．モデル $X_d(\omega)$ を多面体 $\varDelta(\omega)$ で表すことができるとすれば，$\varDelta(\omega)^*$ で表される別のモデルとは何であろうか．実は，これこそがミラー多様体 $X_d^*(\omega)$ なのである．

では，多面体 $\varDelta(\omega)$ から如何にしてカラビ・ヤウ多様体 $X_d(\omega)$ を作り上げることができるのであろうか．その鍵はトーリック多様体である．トーリック多様体についてはよい解説記事[6]が既にあるのでそれを参照して頂くこととするが，一般論は扇(fan)と呼ばれる錐(cone)の集まりに基づいて構築される．$\boldsymbol{R}^n$ における r 次元錐とは原点を

頂点に持ち有限個の整数ベクトルによって生成される r 次元の錐状領域のことである．このような錐の“重なりのない”集まりが，扇である．１つ１つの n 次元錐は，n 次元トーリック多様体のアフィン座標系を与え，錐の集まりとしての扇はそれらがどのように貼り合わさっているかを決めている．特に錐の集まりが有限で，かつ $\boldsymbol{R}^n$ のすべての領域を埋めつくすような扇は，完備扇と呼ばれそれの決める，アフィン座標系の貼り合わせとしての，トーリック多様体はコンパクトであることが知られている．

さて，我々は多面体 $\varDelta(\omega), \varDelta(\omega)^*$ を構成しているが，それぞれの多面体の内部には原点が含まれている．原点から多面体の面に向かって“光線”を当てると錐ができ，すべての面についてこうした錐を考えると，それらは完備扇を与えるがそれらを $\sum(\varDelta)$ および $\sum(\varDelta^*)$ と書く（図２参照）．完備扇 $\sum(\varDelta^*)$ はコンパクトなトーリック多様体 $\boldsymbol{P}_{\Sigma(\varDelta^*)}$ を与えるが，実はこれがモデル $X_d(\omega)$ を考える際の重みつき射影空間 $\boldsymbol{P}^4(\omega)$ に（双有理で）一致することが示される．こうして ambient 空間が，多面体 $\varDelta(\omega)$ から再構成されることになる．他方，超曲面の定義式（１）は ambient 空間 $\boldsymbol{P}_{\Sigma(\varDelta^*)}$ において

$$f(X) = \sum_{\nu \in \varDelta \cap Z^4} a_\nu X^\nu \qquad (3)$$

と表される．ここで，$(X_1, \cdots, X_4)$ は $(\boldsymbol{C}^*)^4 \subset \boldsymbol{P}_{\Sigma(\varDelta^*)}$ での座標関数で，$f(X)$ はそれの有理関数である．

（３）式は，（１）式全体を $z_1z_2z_3z_4z_5$ で割って（したがって $z_i \neq 0,\ i = 1, \cdots, 5$）非斉次座標で書き改めたものである．$f(X) = 0$ を満たす点の $\boldsymbol{P}_{\Sigma(\varDelta^*)}$ における閉包が，モデル $X_d(\omega)$ を再現する．同様な構成を $\varDelta(\omega)^*$ について行うとき，ambient 空間 $\boldsymbol{P}_{\Sigma(\varDelta)}$ における“双対”なカラビ・ヤウ超曲面 $X_d^*(\omega)$ を得ることができる．

こうして得られるカラビ・ヤウ超曲面は，その ambient 空間が特異点を含むため，それの解消をしなければならないが，それを行った後の超曲面を $\hat{X}_d(\omega), \hat{X}_d^*(\omega)$ とすると

$$\begin{aligned} h_{11}(\hat{X}_d(\omega)) &= h_{21}(\hat{X}_d^*(\omega)), \\ h_{21}(\hat{X}_d(\omega)) &= h_{11}(\hat{X}_d^*(\omega)) \end{aligned} \qquad (4)$$

が示されて，図１における対称性を見事に説明する．

最近 7,555 個のモデルすべてについて多面体 $\varDelta(\omega)$ が reflexive であることが確かめられており，こうして共形場との対応がはっきり知られていないカラビ・ヤウ超曲面についても，それがミラー多様体と対を作ることがわかっている．Batyrev の構成によると対称性の鍵は４次元の reflexive 多面体である．少し調べてみると容易にわかることであるが，上記の 7,555 個のモデルから作る多面体 $\varDelta(\omega)$ 以外の reflexive 多面体を容易に見つけることができる．「４次元の reflexive 多面体はいったい幾つあるのか」この問題についての答えはまだ知られていない．

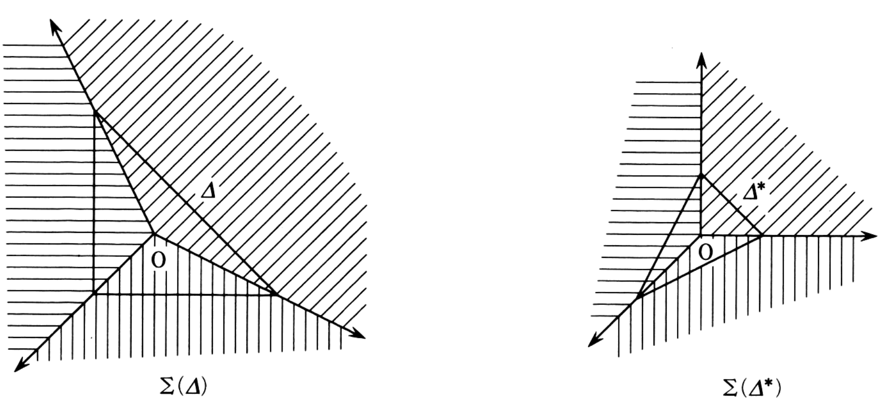


図２　完備扇 $\sum(\varDelta)$ と $\sum(\varDelta^*)$

3. 量子コホモロジー環

前節では，超曲面型のカラビ・ヤウ多様体が常にペアーを作って現れることのBatyrevによる説明を与えたが，ここでは再び超弦理論的な直観と結び付けてミラー対称性の応用について解説したい．

ミラー対称性によると，2つのカラビ・ヤウ多様体 M, W について，$h_{11}(M)=h_{21}(W)$ の関係が成立するが，これは性質の異なったコホモロジーを結び付けていることがわかる．1つは(少々記号がよくないが)

$$H^{*,*}(M, \boldsymbol{C})=\bigoplus_{i=0}^{3} H^{i,i}(M, \boldsymbol{C})$$

で，他方は

$$H^{*,3-*}(W, \boldsymbol{C})=\bigoplus_{i=1}^{3} H^{i,3-i}(W, \boldsymbol{C})$$

である．以下では再び前節で扱ったカラビ・ヤウ超曲面を念頭に置く．その場合，コホモロジー類 $H^{*,*}(M, \boldsymbol{C})$ はambient空間のコホモロジー類を M 上に制限することによって得られる(そうでないtwisted sectorと呼ばれるものも一般には存在するがここでは考えない)もので，通常のコホモロジー環における積を考えることができる．他方で，$H^{*,3-*}(W, \boldsymbol{C})$ のコホモロジー類は，超曲面の変形(複素構造の変形)に関わる量で，それは超曲面の定義式を多項式によって変形する自由度として表される(やはりこれにもtwisted sectorと呼ばれる多項式変形で表されない部分が存在するがここでは考えない)．このような変形の多項式は超曲面のヤコビ環と呼ばれる環の元で，$H^{*,3-*}(W, \boldsymbol{C})$ とヤコビ環の間には同型があることが知られており，したがって $H^{*,3-*}(W, \boldsymbol{C})$ にやはり積が定義できることになる．

共形場の立場からみると，いずれのコホモロジー類も，共形場の局所演算子によって表される．さらに，これらは共形場の理論における演算子積によって閉じた演算子代数を成し，カイラルリングと名付けられている．($H^{*,*}$ 型は反カイラル，$H^{*,3-*}$ 型はカイラルと区別される．) 2種類の局所演算子は全く異なった積を持つことがわかっている：$H^{*,*}$ 型に対応するカイラルリングの生成演算子を $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{h_{11}}\}$ と書くと，その積

$$\phi_i \cdot \phi_j=\sum C_{ij}^{k} \phi_k$$

を表す構造定数あるいは，3点関数 $\langle\phi_i \phi_j \phi_k\rangle$ はインスタントンと呼ばれる非摂動的な補正を受ける．これに対し，$H^{*,3-*}$ 型のカイラルリングの3点関数にはそのような非摂動的補正が生じない[7]．ターゲット空間をカラビ・ヤウ多様体 M に取る非線形シグマモデルを用いた定式化によると，$H^{*,*}$ 型の演算子積に寄与するインスタントンは，複素座標を入れた球面 $\boldsymbol{P}^1$ から M への正則写像であることがわかる．このような正則写像は，$\boldsymbol{P}^1$ 上の共形変換の自由度を差し引いた後，いったいどれ程存在するであろうか．もしそれが，連続的な自由度を持たず数えられるものだとすると，その総数は幾つであろうか．このような問題は，enumerative geometryと呼ばれる代数幾何学の一分野を成しているが，上記の問に答えることはそれ程容易ではない．

さて，ここでミラー対称性に戻ってみるとそれが全く性質の異なった2種類のコホモロジーを結び付けていることがわかる．弦理論の立場から考えると，この関係は共形場の局所演算子の代数の間に同型が存在することとして理解される．$H^{*,*}$ 型の演算子代数はインスタントンからの量子補正を受けるので，これは量子コホモロジー環と呼ばれ $H_q^{*,*}(M, \boldsymbol{C})$ と表される．

物理学者Candelasを中心とするグループは，$\boldsymbol{P}^4$ の5次超曲面，$X_5(1^5)$，の場合に量子コホモロジー環を実際に構成することに成功し，物理学者のみならず数学者をも驚かす結果を得た[8]．その構成のアイデアは，量子補正を含む量子コホモロジー環 $H_q^{*,*}(M, \boldsymbol{C})$ とそれを全く含まない $H^{*,3-*}(W, \boldsymbol{C})$ をミラー写像と呼ばれる写像で結び付けるものであった．後者の $H^{*,3-*}$ 型のコホモロジー環(演算子代数)は量子補正は受けないが，超曲面の多項式変形に応じた変形を与えることができる．$X_5^*(1^5)$ の場合その次元は1次元であり，

その変型の自由度を変数 ψ を用いて

$$f(z) = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5 - 5\psi z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$$

と表すことにする．このとき，この多項式変形に応じたコホモロジーの変形は次のように与えられる；

$$H^{*,3-*}(W_\psi, \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}[z_1, z_2, \cdots, z_5]^G \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial z_5}\right) \quad (5)$$

ここで，G はミラー多様体 W_ψ を orbifold 構成によって作るときに必要な離散群 $(\boldsymbol{Z}_5)^3$ で，$\boldsymbol{C}[z_1, z_2, \cdots, z_5]^G$ はそれの不変多項式を考えることを意味する．また，$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial z_5}\right)$ はヤコビイデアルである．Candelas らは，large radius 極限と呼ばれる，インスタントンによる量子補正が消える極限領域を手掛りに，M の量子コホモロジー環を（5）に示す変形されたヤコビ環に結び付けた

$$H_q^{*,*}(M, \boldsymbol{C}) \cong H^{*,3-*}(W_\psi, \boldsymbol{C}).$$

具体的に，2つの変形のパラメーター t $(q = e^{2\pi i t})$ と ψ の間の関係（ミラー写像）を決めたのである．ヤコビ環の構造定数 $C_{\psi\psi\psi}$ は容易に $\frac{5\psi^2}{1-\psi^5}$ であることがわかるので，これにより量子コホモロジー環の構造定数 κ_{ttt} が決まる．結果は

$$\kappa_{ttt} = \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2 \frac{5\psi^2}{1-\psi^5}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^3 = 5 + 2875q + 4876875q^2 + \cdots \quad (6)$$

である．ここに現れる正整数 $n_1 = 2875$ は非線形シグマモデルにおけるインスタントンを数え上げていると期待される．これはトポロジーを表す次数という量が1である最もやさしい形状をしたインスタントンであるが，そのようなインスタントンの数については数え上げができて，2875 はその数にまさに一致する．次に，（6）式から読み取る高次の数 $n_2 = 609250$, $n_3 = 317206375$ についても数学者の計算と一致することがわかっている[9]．実は，4次以上については数学者はそれを具体的に数え上げる手段を持たないが，（6）の級数はそれらを母関数（母級数！）として与えていると考えられる．なぜそのようなことが可能なのか，超弦理論の数理の解明とともに解き明かされていくことであろう．

その他，数多くのカラビ・ヤウ多様体についても量子コホモロジー環を調べることに興味が持たれるが，変形の次元が低い場合には系統的な解析ができることがわかっている[10]．また，数学者 Kontsevich と Manin[11] は量子コホモロジー環の公理化を行い，それによっていまではカラビ・ヤウ多様体を含むより一般な複素多様体について量子コホモロジー環を定義することが可能になっている．

4．カラビ・ヤウ多様体とモジュライ空間

図1にみられる対称性（ミラー対称性）にいま一度戻ることにしよう．Batyrev によってミラー対称性の現象は説明されたのであるが，もう少し踏み込んだ解釈も考えられる．すなわち，個々のカラビ・ヤウ多様体についてその変形の空間を考えると，それらは互いにつながって1つの空間にまとまっているのではないか．もしそうだとすれば，あるカラビ・ヤウ多様体が持つ性質，ミラー対称性，は他のすべてのカラビ・ヤウ多様体にも共有されることになる．多様体の変形の空間はモジュライ空間と呼ばれている．異なる多様体のモジュライ空間が，特異点を持つ多様体を経由して互いにつながる例があることは知られており，そこで一般に現れる特異点を持つ多様体は conifold と名付けられている．

弦理論によると，モジュライ空間は低エネルギー領域における有効作用（ラグランジアン）を決める．有効作用は，モジュライ空間上の計量（special Kähler）によって書かれる，物質場を含む $N = 2$ 超重力理論の作用である．変形の空間，モジュライ空間の局所座標として前節でみたように，超曲面の多項式変形のパラメーター ψ_i $(i = 1, \cdots, h_{21})$ を採用することができるが，次のような周期（積分）による座標を考えるとモジュライ空間の様子をうまく調べることができる．いま，A_a, B_b $(a, b = 0, 1, \cdots, h_{21})$ をカラビ・ヤウ多様体の3次元ホモ

ロジーサイクルのシンプレクテック基底としよう．このとき周期は正則3形式 $\Omega(\psi)$ の積分として

$$Z^a(\psi)=\int_{A_a}\Omega(\psi),\quad \mathcal{G}_b(\psi)=\int_{B_b}\Omega(\psi)$$

で与えられる．モジュライ空間にはケーラー計量が入ることが知られているが，それのケーラーポテンシャルは

$$K(\psi,\bar{\psi})=\log i\sum_a\{\overline{Z^a(\psi)}\mathcal{G}_a(\psi)-Z^a(\psi)\overline{\mathcal{G}_a(\psi)}\} \quad (7)$$

で与えられている．

超曲面型のカラビ・ヤウ多様体の場合，一般に(7)で決まるケーラー計量には特異点が現れることがわかるが，そのような特異点は超曲面が退化する所，すなわち超曲面の discriminant (判別式) がゼロとなる所で現れる．退化は一般にノードとして現れ特異点を原点にして局所的に

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2=0 \quad (8)$$

と書くことができる．(8)式の原点から半径 $\sqrt{2}r$ の距離にある点を調べると，2次元球面と3次元球面の直積 $S^2\times S^3$ であることがわかる．特に後者の S^3 は，その半径が r であり，原点に向うにつれて1点につぶれていくもので，消滅サイクルと呼ばれている(図3参照)．消滅サイクルをシンプレクテック基底の1つ，例えば A_1 に取ると，対応する周期 $z^1(\psi)$ はモジュライ空間で超曲面が退化する場所の局所方程式 $z^1(\psi)=0$ を与えることになる．他方で対応するサイクル B_1 についての周期 $\mathcal{G}_1(\psi)$ は，$z^1(\psi)=0$ の近傍で

$$\mathcal{G}_1(\psi)\sim z^1(\psi)\log z^1(\psi)$$

と振舞うことがわかり，(7)式と合せてみると計量の1成分 $g_{1\bar{1}}$ に

$$g_{1\bar{1}}\sim 1/z^1\bar{z}^1(\log z^1\bar{z}^1)^2 \quad (9)$$

と振舞う特異点が現れることがわかる．

弦理論の有効作用では，計量は運動エネルギー項に現れ，この項の発散は理論の破綻を示す．(9)に見られる発散が理論の破綻をもたらすとすると，ほとんどすべてのカラビ・ヤウコンパクト化のモデルには(9)に示す発散が生じるので，弦理論の有効作用はすべて意味のないものになってしまうかにみえる．最近の研究によると，(9)に見られる計量の発散は $z^1(\psi)\neq 0$ では質量を持っていた粒子の場が，$z^1(\psi)=0$ において質量を失うことに由来しており，この場を正しく処理すれば計量の発散の問題はうまく回避されることが指摘されている[12]．

また，この問題とモジュライ空間の連結性の問題を結び付ける議論も与えられている[13]．その既略を見るために $\boldsymbol{P}^4$ の中で5次斉次元で与えられる超曲面を考える．そのような超曲面には101次元の変形の自由度があることは容易に調べられる．これだけ次元が大きいと退化の様子も実に多くの場合が現れるが，その中で超曲面の定義式が次のような形になる場合を考えよう；

$$z_4f(z)+z_5g(z)=0 \quad (10)$$

少し考察すると，この超曲面には86次元の変形の自由度が残されていることがわかる．また，(10)の超曲面は $\{z_4=z_5=f(z)=g(z)=0\}$ で決まる16個の点でノード特異点を持つ conifold であることもわかる．16個の特異点それぞれについて

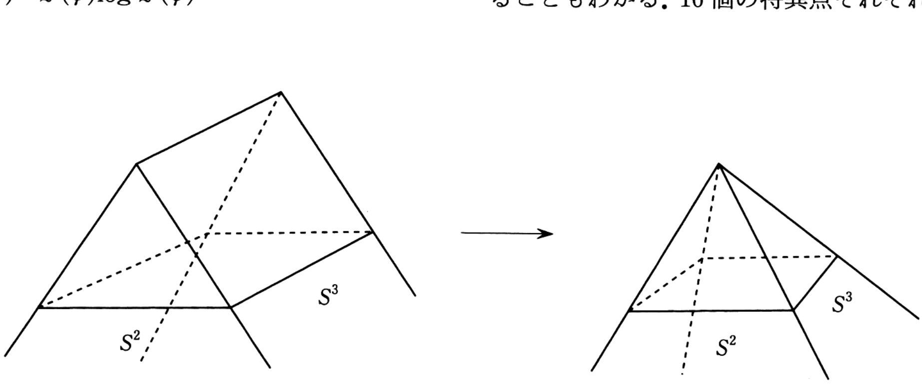


図3 超曲面の退化に伴い消滅サイクル S^3 がつぶれる．

消滅サイクルを作ることができるが，実はそのうちの 15 個が独立なサイクルであることがわかる．このことは，101－86＝15 からも理解できることである．16 個の特異点から微小半径の位置は $S^2\times S^3$ の形状を持つからこれに $B^3\times S^3$（B^3 は 3 次元球体）を貼り合せることによって，なめらかな 5 次超曲面と同じカラビ・ヤウ多様体を得ることができる．他方，$z_4=z_5=0$ で決まる $\boldsymbol{P}^4$ の部分多様体に一度 blow up と呼ばれる手続きを施すと $\boldsymbol{P}^4\times\boldsymbol{P}^1$ において

$$w_2z_4-w_1z_5=0,\ w_1f(z)-w_2g(z)=0$$

で与えられる完全交叉型のカラビ・ヤウ多様体を得る（ここで，w_1, w_2 は $\boldsymbol{P}^1$ の斉次座標）．この多様体の変形の自由度は 86 次元であるので，なめらかな 5 次超曲面とは異なったトポロジーを持つ．この例で見るように，多くのカラビ・ヤウ多様体は conifold の出現を許して別のカラビ・ヤウ多様体につながっているのではないだろうか．超弦理論の有効作用を用いた解析はそれを示唆しているようである．

ミラー対称性の起源の解明とその応用を巡って，物理学・数学の境界を越えた今後の研究とその成果が期待されている．

追記（1998 年 12 月）

この原稿を書き上げてからもう 4 年近くになる．その間にミラー対称性を巡って多くの進展が見られたのでこの機会に 2, 3 について言及し，文献を補足したいと思う．

まず本文（6）式が与えるインスタントン数について，それの「数え上げ」に替わる自然な定義が数学者 Kontsevich によって与えられ[14]，その意味で（6）式の数学的正当化が完成している[15]．そして現在では高い種数（genus）を持ったインスタントンの解析が一つの問題となっている．他方，物理の側では D（Dirichlet）-brane と呼ばれる弦理論のソリトン解が発見され[16]，カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性はこのソリトン解の間に見られる双対性（T-双対性）として理解されることが Strominger-Yau-Zaslow[17] によって指摘されている．現在この描像は，幾何学的ミラー構成法と呼ばれミラー対称性を最も一般的立場から説明するものとして注目を集めている．また，「弦理論の双対性」[18] という統一的な見方が現れ，ミラー対称性はその一例と理解されるようになって来ている．統一理論としての弦理論は，理論物理学としても数学の題材としてもますますその深みを増していく感じである．

参考文献

1) Essays on Mirror Manifolds (S.-T. Yau, ed.) International Press, 1992.
2) M. Bershadsky, S. Ceccotti, H. Ooguri and C. Vafa: *Nucl. Phys.* **B405** (1993) 279.
3) A. Klemm and R. Schimmrigk: *Nucl. Phys.* **B411** (1994) 559.
P. Candelas, C. A. Lütken and R. Schimmrigk: *Nucl. Phys.* **B306** (1988) 113.
4) B. R. Greene and M. R. Plessor: *Nucl. Phys.* **B338** (1990) 15.
5) V. V. Batyrev: *J. Algebraic Geometry* **3** (1994) 36.
6) 小田忠雄：凸体と代数幾何，数理科学 3 (1994) 36.
7) J. Distler and B. R. Greene: *Nucl. Phys.* **B309** (1988) 295.
8) P. Candelas, X. C. de la Ossa, P. S. Green and L. Parks: *Nucl. Phys.* **B359** (1991) 21.
9) 文献 1) 中の，S. Katz 及び G. Ellingsrud and S. A. Strome による．
10) S. Hosono, A. Klemm, S. Theisen and S.-T. Yau: *Commun. Math. Phys.* **167** (1995) 301.
11) M. Kontsevich and Yu. Manin: *Commun. Math. Phys.* **164** (1994) 525.
12) A. Strominger: *Nucl. Phys.* **B451** (1995) 96.
13) B. R. Greene, D. R. Morrison and A. Strominger: *Nucl. Phys.* **B451** (1995) 109.
14) M. Kontsevich, *Prog. Math.* **129** (1995) 335-368, Birkhäuser Boston.
15) A. B. Givental, *Int. Math. Res. Notices* **13** (1996) 613-663.
16) J. Polchinski, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724-4727.
17) A. Strominger, S.-T. Yau and E. Zaslow, *Nucl. Phys.* **B479** (1996) 243-259.
18) J. Polchinski, *Rev. Mod. Phys.* **68** (1996) 1245-1258.

（ほその・しのぶ，東京大学大学院数理科学研究科）

デュアリティーとM理論

太田 信義

1. はじめに――11次元の逆襲

現在素粒子の相互作用としては，強，弱，電磁，重力の4つが知られている．このうち最初の3つは，ゲージ理論として記述できることがわかっていて，量子論的にもうまくいっているように思われる．ところが最後の重力だけは，どうしても量子論との相性が悪く，いわゆる処理できない発散の問題がある．いやそれだけでなく量子化するということ自体の意味が問われている．

これらのうち最初の問題にまともに答えようとして考えられた理論が，重力理論と超対称性を融合した超重力理論である．そのうち特に11次元超重力は，次の3つの点で有力と考えられた．

1) 4次元で考えたとき，理論に含まれるスペクトルはちょうどスピン2のグラヴィトンまでである．

2) 11次元から4次元へコンパクト化したときに，内部対称性が現れるが，この余分の7次元は強，弱，電磁相互作用を記述するのによい $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を出すのにちょうど必要な次元数である．

3) この性質を持つ理論としては最大の対称性を持ち，したがって理論はユニークであって曖昧な点は一切ない．

しかしこれらの希望は，超重力理論が摂動論的な意味で処理できない発散を含むだろうということが明らかになるにつれ，破れてしまった．また1984年に重力の異常項についての研究がなされ，その結果量子論として矛盾のない超弦理論は非常に数が少ないこと，そしてその中に現象論的に大変有望な理論があることが発見されてから俄然様相が変わり，超弦理論が自然界の基本的な力を統一的に記述する有力な理論であると考えられるようになった．その根拠としては，まず第1に理論が必然的に重力を含む（特にその低エネルギー有効理論は超重力理論である）こと，第2に相対論的量子論につきものの発散がなく，ユニタリーな摂動論的重力理論を与えると予想されること，第3に現象論的によい理論は少ないので理論が自然に選ばれてしまい，人工的な点がないということにある．もちろん，このような理論は10次元で定義されているものであるが，4次元へコンパクト化することによって，現実的な理論を構成することが可能である．

このようにして，11次元の理論は駆逐されたかに見えた．そして10次元の超弦理論としては次の5つの矛盾のない理論があることがわかっており，そのうちいくつかのものはすでに内部対称性を含む理論であり，現実の理論として有望である．

i) IIA型超弦理論

ii) IIB型超弦理論

iii) $E_8 \times E_8$ ヘテロ型超弦理論

iv) $SO(32)$ ヘテロ型超弦理論

v) $SO(32)$ I型超弦理論

ここで最初の2つのII型理論というのは，10

次元のマヨラナワイルスピノール2つの超対称性変換（$N=2$）の下で不変な閉弦の理論，3番目と4番目のヘテロ型理論は1つだけの超対称変換（$N=1$）の下で不変な閉弦の理論で，書かれている群の対称性を持つゲージ理論が含まれた理論，最後のI型理論は $N=1$ 超対称性を持つ開弦も含む理論でやはり $SO(32)$ のゲージ理論を含む弦理論である．これらに対応して質量を持たない粒子だけによる低エネルギー有効理論が存在して，それが超重力理論と呼ばれる場の理論になっている．

しかしこうしてみると今度は逆に，5つの矛盾のない10次元の超弦理論のうちどれを我々の現実世界を記述するものとして採用したらよいか，まったくわからないことが問題になってくる．またいまの超弦理論は摂動論で定義されたもので，これは漸近展開の意味しか持っておらず，満足のいくものではない．これらのうち最後の2つは，低エネルギー有効理論として同じ超重力理論と超対称 $SO(32)$ Yang-Mills 理論を与えているので，実は同じものではないかという推測があった．しかし，これらがどのように関係するかはなかなか難しい問題として残っていた．

この3年程の間にこの問題について大きな発展の芽が出てきた．それが本稿で説明しようとするM理論である*1)．これは11次元で定義される理論であって，その低エネルギー極限は11次元超重力になっている．その意味で一旦超弦理論によって駆逐されたかに見えた11次元は，新たな意味を持ってよみがえったのである．このM理論によって，上にあげたいろいろな理論は実は1つの統一的な理論の真空の取り方の違いであって，異なる真空の周りの漸近展開であると理解される．

2. 何故11次元なのか

まず始めに，超対称性を持つ弦理論を考えると，時空の次元は10になるといわれていることを思い出そう．しかしこれは決して時空の次元が10に限るということを意味していない．単に摂動論的に理論を考えたとき，10次元として考えないと具合が悪いということであり，後に見るように少なくとも10次元であると考えるのが妥当なのである．言い換えると摂動論で見えない次元があっても一向差し支えない．

一方超対称性という観点から考えると，実質的な時空の次元は11次元以下でなければならない．その理由は，超対称性の表現論に起因する．これを少し詳しく説明しよう．理論が超対称性を持つということは，その対称性変換を起こす生成子があり，それに対応するフェルミオン的荷量*2)があるということである．理論のすべての状態はこの荷量をかけるとお互いに移り変わることになるが，いまの場合この荷量が同時に状態のスピンも変えるので，問題になる．超対称性が大きければ大きい程，どうしても理論にスピンの大きな粒子がなければならないのである．一方，フェルミオンというのは，4次元では4成分を持ち，したがって超対称性に対応する荷量も4成分だが，次元を上げるとこれが2次元ごとに2倍の大きさになっていく．つまり，6次元では 2^3 成分，$\cdots$ となり，11次元では 2^5 成分で4次元の8倍になる．その結果，スピン0から始めたとして，4次元ではスピン 1/2 ですむものが，11次元の理論から得るものは $\frac{1}{2}\times 4=2$ まで必要になる*3)．したがって，次元をもう1つ上げると，どうしてもスピンが2を越えるものがでてきてしまう．

それで何故悪いかと思うかもしれない．実は素粒子の局所場の理論として，スピンが2を越える粒子の相互作用を含む理論は作られていないし，できないと考えられている．スピン2を含む唯一矛盾のない理論が，いま考えようとしている一般

*1) M理論のMは，最初 Membrane（膜）の頭文字からきたが，Mother（母）あるいは後に出てくる Matrix（行列）の頭文字と考えてもよい．

*2) これは英語の charge という言葉の訳であるが，通常電荷と訳されている．しかし，本来は荷物のように物体が背負っているもののことで，磁荷やその他のものでもよい．これを電荷と呼ぶのは誤解を招くので，ここでは荷量と呼ぶことにする．

*3) 8でなく4をかけるのはスピンを増やす荷量は半分で，残りは減らすものになるため．

座標変換不変性を持つ重力理論である．というわけで，我々が考え得る矛盾のない超対称な理論は10次元か11次元の理論に限られてしまうわけである．しかしこれだけでは特に11次元となる必要はない．この状況をあざやかに破って，11次元を提唱したのがWittenであった．

彼の議論の本質は，理論を支配している結合定数が大きくなったときには，摂動論的に見えるスペクトルだけではなく，さらにいろいろな状態が質量のない状態になるという点にある．超対称性があるときには，任意の状態の質量と荷量の間には一定の不等式が成り立つのであるが，超対称性を一部だけ破って残りは破らない状態（これを**BPS状態**という）に対しては，これが等号になっている．この等号が成り立つときは，上に述べた表現論が著しく変更され，表現の大きさ（含まれる状態の数）が違うのである．このため，この等号が成り立つ場合には，理論の結合定数がいかに変化しようと，いかに量子論的な補正があろうと，等号のまま成り立つことになる．このことは状態の質量が荷量で厳密に表されることを意味している．ところが，超弦理論の中にはこのような状態が無数に発見されていた．しかもそれらの質量は，いまの関係式を調べてみると，超弦理論の結合定数を無限大にする極限で厳密に0になることが結論できるのである．このような無数の質量のない状態はどのように解釈したらよいだろうか？ 10次元の超弦理論の範囲でこのようなスペクトルを解釈するのは難しい．その他いろいろな状況証拠とあいまって，これらは11次元の理論が円周 S^1 にコンパクト化して出るKaluza-Klein（略してKK）モード*4)であると解釈するのがもっともよいことがわかる．以下ではこれらの状況証拠について，若干の説明を試みる．

*4) 1次元の座標 y が半径 R の円周になっているとすると，場は

$$\phi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(x)e^{i2\pi ny/R},$$

と展開されることになり，1次元下の空間では無数の場があると理解される．この無数の状態のことをKKモードと呼ぶ．

3. 11次元超重力，II型超弦理論とデュアリティー

いままで説明なくIIA型，IIB型超弦理論と言ってきたが，これらは10次元の超対称性の生成子を2つ持つが，それらのカイラリティーが反対の場合と同じ場合の理論である．したがってIIAはベクトル的理論であり，IIBはカイラルな理論になっている*5)．

11次元の超重力理論は最初に述べたように，最大の対称性を持つ唯一の超重力理論として構成された．これを1次元落とすことにより，IIA型超弦理論の有効理論であるIIA型の超重力理論が構成される．11次元の理論には3階反対称テンソルが含まれていて，それを背景場として用いて面ブレイン解*6)を構成することができる．これを1次元落とすと10次元の超弦を構成することができる．さらにその双対な解として，5ブレイン解も構成されている*7)．

*5) 4次元の（ディラック）フェルミオンは4成分を持つが，質量を持たないフェルミオンに対してはディラック行列 γ_5 の固有値が ±1 の2つの固有状態に分解することができる．この固有状態のことをカイラルフェルミオンまたはワイルフェルミオンと言い，もとのディラックフェルミオンに較べて半分の成分しか持たない．ここでカイラリティーと呼んでいるのは，この固有値のことである．空間を反転させるパリティ変換の下で，これらのフェルミオンは入れ替わる．そのため ±1 の固有値のフェルミオンが対称に入った理論は空間反転の下で不変な理論になり，非対称に入っていると不変でない理論になる．前者をベクトル的理論と言い，後者をカイラルな理論と言う．以上は4次元の場合であるが，時空の次元が偶数ならばまったく同様のことが成り立つ．これから，カイラルな理論は偶数次元でだけ可能なことがわかる．さらに既に述べたように，奇数次元のフェルミオンは成分の数は1次元下の偶数次元の場合と同じであるが，そこではワイルフェルミオンが基本単位であって，ワイルフェルミオンが2つあることになる．特に11次元のフェルミオンを10次元のフェルミオンに分解すれば，2つになる．10次元理論の $N=2$ 超対称性はこのような数え方をしたものであり，11次元の $N=1$ 超対称性と数は同じになる．また本稿でも少し出てくる量子異常は，カイラルな理論（したがって偶数次元）でだけ起こる特異な現象であることがわかっている．

*6) ブレインとは点状の粒子ではなく，空間的に拡がった物体のことである．拡がった空間の次元が p あるものを，p-ブレインと呼ぶ．もともと膜を意味するmembraneからきたものと思われる．

*7) 一般に p-ブレイン解があれば，それと双対な $\tilde{p}=D-p-4$ ブレイン解があることが知られている．

もしこのような10次元と11次元の超重力理論の関係が，超弦理論と11次元の理論の関係を示すものならば，10次元の理論には11次元の痕跡であるKKモードがなければならないはずである．すばらしいことに，そのような0-ブレイン解とその双対である6-ブレイン解は存在することがわかっており，矛盾はない．

そこで11次元の理論を実際に1次元だけ円周 S^1 にコンパクト化して10次元に落とすことを考えてみる．低エネルギー理論をうまく対応させるためには，それぞれの計量の対応を

$$ds_{11}^2 = e^{-2\phi(x)/3} g_{\mu\nu}^{(10)} dx^\mu dx^\nu + e^{4\phi(x)/3}(dy - C_\mu(x)dx^\mu)^2, \quad (1)$$

と選ばなければいけない．ここで $\phi(x)$ は理論に含まれるスカラー場で，ディラトンと呼ばれる．その結果，11次元の半径 R_{11} はディラトンの真空期待値 $\langle\phi(x)\rangle$ を用いて（11次元のプランク長 $=1$ とする単位系で）

$$R_{11} = e^{2\langle\phi(x)\rangle/3}, \quad (2)$$

で与えられることになる．一方IIA型超弦理論の結合定数は

$$g^{(\mathrm{A})} = e^{\langle\phi(x)\rangle}, \quad (3)$$

で与えられるので，これらの関係から

$$g^{(\mathrm{A})} = R_{11}^{3/2}, \quad (4)$$

となることが結論される．

この関係 (4) から，$g^{(\mathrm{A})}$ についての摂動論は $R_{11} = 0$ のまわりの展開であり，それで11次元の存在がわからなかったことが理解できるのである．さらにまた，KKモードである0-ブレインの質量は，

$$1/R_{11} = (g^{(\mathrm{A})})^{-2/3}$$

に比例しており，強結合の極限で質量が消えることもわかる．こうして**IIA型超弦理論の強結合の極限は11番目の次元を大きくすることに対応しており，11次元の理論になっている**ことが理解されよう．これをM理論というのである．

さてここでIIA型とIIB型の理論を，さらに半径 R の円周 S^1 に1次元コンパクト化することを考える．このときこの方向に周期的境界条件がつくため弦の運動量は $1/R$ で量子化されることになるが，それ以外に弦が円周に巻き付くことも考えられる．その結果弦の座標のモード展開に現れる運動量が

$$p_{\mathrm{R}}^{10} = \frac{n}{R} + \frac{m}{2}R, \qquad p_{\mathrm{L}}^{10} = \frac{n}{R} - \frac{m}{2}R, \quad (5)$$

となる．ここで n, m は整数である．これをみると

$$(n,m), R \leftrightarrow (m,n), \frac{2}{R}, \quad (6)$$

の下でこれらが（符号を除いて）もとに戻り，状態の質量は変化しないことがわかる．一方カイラリティーは，これらのボソン的自由度に付随したフェルミオンの積によって決まっており，この入れ替えの下で符号を変える．その結果，**IIA型の理論から出発した場合，この変換をすることによって1つのフェルミオンのカイラリティーが変わり，IIB型の理論に移ることになり，逆も正しい**．これを**T-デュアリティー**という．T-デュアリティーとは，このように右向きの波は変えないで，左向きの波に対応する座標の符号だけを変える操作であり，他の超弦理論でも考えられることを注意しておく．

このときのコンパクト化の半径には，上でみたようにディラトンが関係してくる．コンパクト化した有効理論を較べることにより，IIA型とIIB型の理論をコンパクト化する半径を R_{A}，R_{B} とかけば

$$e^{-\phi_{\mathrm{A}}} R_{\mathrm{A}} = e^{-\phi_{\mathrm{B}}}, \quad R_{\mathrm{A}} = 1/R_{\mathrm{B}}, \quad (7)$$

という関係になっていることがわかる．さらに，IIA型理論の10次元計量は

$$ds_{10}^2 = ds_9^2 + R_{\mathrm{A}}^2 dx^2$$

とかけるから，(1) 式に見たように11次元の立場から見れば，10次元の半径 R_{10} と R_{A} には

$$R_{10} = e^{-\phi_{\mathrm{A}}/3} R_{\mathrm{A}}, \quad (8)$$

という関係があることがわかる．これらを組み合わせると，

$$g^{(\mathrm{B})} \equiv e^{\phi_{\mathrm{B}}} = \frac{R_{11}}{R_{10}}, \tag{9}$$

という関係を得る．

この最後の関係式 (9) をながめると次のことに気づく．この結合定数を持つ S^1 にコンパクト化したIIB型の理論は，11次元の理論をトーラス T^2 にコンパクト化した理論と考えることができる．そこで R_{11} と R_{10} の比を固定したまま，$R_{11}, R_{10} \to 0$ の極限を考えると（これはIIAで言っているので，IIB型では10次元目の大きさは大きくすることになることに注意），コンパクト化していないIIB型理論になる．ところが R_{10} と R_{11} の取り方は勝手なので（どちらをどう呼ぶかだけの問題），$g^{(\mathrm{B})}$ のIIB理論と $1/g^{(\mathrm{B})}$ のIIB理論はまったく同じ理論であることになる．より一般にこの結合定数を $SL(2, \boldsymbol{Z})$ 変換

$$g^{(\mathrm{B})\prime} = \frac{ag^{(\mathrm{B})} + b}{cg^{(\mathrm{B})} + d}, \quad ad - bc = 1, \tag{10}$$

した理論は同等であると考えられている．これをIIB型理論の**S-デュアリティー**という．

このことは超弦理論の質量を持たない粒子状態を考えても理解される．最初に述べたように，超対称性の表現は決まっており，質量を持たない場合はスピンが2まででとまる．しかし質量を持つ粒子の場合はスピンが4まで含まれてしまうのである．強結合になったときこのような粒子の質量がなくなるとすれば，その有効理論にスピン4の粒子が現れてしまうことになるが，既に述べたように，そのような有効理論は不可能と考えられている*8)．したがって，理論が強結合であっても弱結合であっても，理論に含まれる質量を持たない粒子は同じであると考えられる．故に強結合の理論の有効理論は弱結合の場合のそれと同じであるということになり，両者を結びつける対称性変換が存在するはずである．その具体的な形がいま述べたものである．

これらのS-デュアリティーとT-デュアリティーは組み合わさって，大きなデュアリティーの群をつくると期待される．これを**U-デュアリティー**という．実際IIB型超重力理論にはこの対称性があることが知られている．

デュアリティーという言葉は物理では長い歴史を持っていて，いろいろな意味に使われてきた．本質的には，一見異なるように見える物理系が同等であるとか，表裏一体の関係にあることを意味している．最初は有名な量子力学の粒子性と波動性のデュアリティー（2重性）であろう．また2次元のボソンの場の理論であるsine-Gordon模型とフェルミオンの理論であるThirring模型の同等性や，Ising模型の高温相と低温相の関係もあり，理論を厳密に解いたり，より深く理解するのに役立ってきた．素粒子論では反応の s-チャンネルと t-チャンネルのデュアリティーという概念もあって，それが弦理論の成立に大きく関わってきた*9)．また電磁気学では電気と磁気のデュアリティーがある．マクスウェル方程式は，電場と磁場を入れ替えても対称であるので，電荷だけでなく磁荷もあってもよいと考えられる．ディラックは，n を整数，$\hbar$ をプランク定数を 2π で割ったものとして，電荷 q_{e} と磁荷 q_{m} には量子化条件

$$q_{\mathrm{e}} q_{\mathrm{m}} = 2\pi n \hbar, \tag{11}$$

が成り立たないといけないことを示した．さらに素粒子の大統一理論では，モノポール（磁気単極）がソリトンとして存在することが知られている．この関係 (11) からただちにわかるように，電荷が小さいときはモノポールは強結合になっている．上に述べたS-デュアリティーは，同じ意味で理論の強結合と弱結合を入れ替えるデュアリティーになっている．

ついでながら，同様な議論は何故IIA型の理論

*8) ここで勘のいい読者は，超弦理論の重い粒子についてはスピンが2を越えてもいいのに，質量のない粒子に対する低エネルギー有効理論では何故だめと言っているのか，疑問を感じるかもしれない．低エネルギー有効理論についての制限は，あくまでその理論が局所場の理論として書けており，理論には有限個の状態しか含まれていないことを前提としている．超弦理論はその範囲に入らないもっと拡張された理論である．そのため理論の中には無限個の重い粒子が存在しており，スピンの高い粒子があっても，理論の無矛盾性が保証されているのである．

*9) 上のS, T, Uデュアリティーという命名はこのパロディーになっている．

に当てはまらないのだろうか？ それは超対称性の生成子がカイラリティーの違うものの組み合わせになっていて，IIB 型と違う中心荷量を許す代数を構成しているためである．これも既に 2 節で述べたように，この荷量が質量と等しくなると，質量のない粒子と同じ数の粒子だけでよくなり，したがってスピンが 2 までの質量を持つ粒子が許されることになる．この結果，強結合で質量が消える粒子があってもよい．そして現在知られているそのようなスピン 2 の粒子を与えるのは 11 次元の超重力理論を 10 次元に落としたものだけである．このことからも，IIA 型理論の強結合理論は 11 次元超重力理論でなければならないことがわかる．

以上の議論は，次のような図 1 にまとめることができる．ここで，既に述べたように R_{11} と R_{10} の取り方は勝手なので $R_{10} \geq R_{11}$ の領域に限ってよいことと，$R_{11} = 0$ 以外のところは本質的に 11 次元であることを注意しておく．

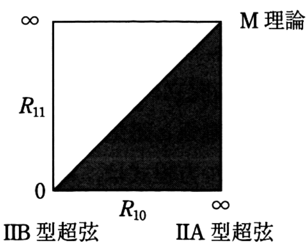


図 1　II 型理論と M 理論

4. ヘテロ型理論と I 型超弦

いままで我々は，II 型の超弦理論が M 理論で統一されることを見てきたが，残りの理論がどうなっているかも問題である．この節ではそれを説明しよう．

M 理論を円周 S^1 にコンパクト化したときは IIA 型超弦理論になる．これを少し変えて S^1/Z_2 にコンパクト化することを考える．ここで Z_2 は，S^1 に $y \to -y$ という同一視を入れたもので，2 回繰り返すともとにもどる巡回群である．円周 S^1 を $y = -L \sim L$ の領域で周期的境界条件で両端が同一視されたものと考えると，Z_2 の同一視により，これは $y = 0 \sim L$ の線分と同じになる．ただし両端の点 $y = 0, L$ はこの同一視のときに不変な固定点となっていて，特異点を与える．実はこれらの「固定点」は点ではなく，超面的境界である．

さて，Z_2 の同一視によって，もともと存在した 11 次元の超対称性は半分に破れて，10 次元の $N = 1$ 超対称性になる．これが S^1 のときとの大きな違いであるが，この超対称性を持つ理論は前に挙げた iii) ～ v) の 3 つである．この S^1/Z_2 の長さが小さくなると，S^1 が小さくなったときに IIA 型理論が得られたように，いずれかの超弦が得られると期待される．これは一体どれであろうか？

答えは重力の量子異常項を考察することによって与えられる．詳しいことは説明できないが，もともと 11 次元の理論には異常項はないが，S^1/Z_2 にコンパクト化したときは，上記の固定点のところから異常項が生じる．しかしこれは理論がうまく定義されているならば何らかの機構でうち消されているはずである．これはこの境界上に存在するゲージ理論があって，その寄与で消えると考えるのがもっとも自然で，そのためには 496 個のゲージ場がなければならない．そこで可能性として $SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ が考えられるわけであるが，離れたところにある固定点が 2 つ平等に存在することから，ゲージ群も直積 $E_8 \times E_8$ であると考えられる．すなわち $E_8 \times E_8$ **ヘテロ型超弦理論の強結合極限が M 理論になっている**はずである．

これでこの種の理論と M 理論の関係の手がかりが得られた．後は残りの超弦がこれとどのように関係しているかである．

まず iii) と iv) の $E_8 \times E_8$ **と** $SO(32)$ **のヘテロ型理論は，前節で考えた T-デュアリティーで関係している**ことが知られている．これを理解するために，再びこれらの理論を S^1 にコンパクト化する．と言ってもゲージ群が違うままでは同じ理論になるはずがないので，その共通の部分群として $SO(16) \times SO(16)$ があることに注目して，一旦ゲージ群をこれに破ってそれから二者をつなぐこ

とを考える．うまいことに，S^1 にコンパクト化したときはその中に磁場を通して，一般に磁束 $\oint A$（これを Wilson line と呼ぶ）*10) に期待値を持たせることができる．そして理論の対称性を使うことにより，もとの対称性 $E_8 \times E_8$ または $SO(32)$ のカルタン部分代数にこの Wilson line の値をうまくとって，対称性を $SO(16) \times SO(16)$ にすることができるのである．一方このようなコンパクト化のうち理論の無矛盾性が保証されるような空間は唯一であることが知られているので，双方から得られた理論は同じ理論になっているはずである．こうして $SO(32)$ 理論を半径 R にコンパクト化して得られた理論と同じものが，$E_8 \times E_8$ 理論を半径 $1/R$ にコンパクト化して得られることがわかる．その結果，コンパクト化していない理論も何らかのパラメーターでつながった違う真空上の理論であることがわかるというわけである．

次に，$SO(32)$ **I 型理論は IIB 型理論の orientifold 理論になっている．** IIB 型理論は左向きの波と右向きの波を入れ替える世界面上のパリティ変換で不変である．この変換の下で符号を変える状態と変えない状態を含んでいるが，ここで符号を変える状態は捨てて，変えない状態だけ残すことが許される．それと同時に時空の方もひねる操作を付け加えることにより（これが orientifold の命名のもとになっている操作），$SO(32)$ 対称性を持つ開いた超弦を導入することができ，量子論的矛盾のない I 型理論ができるのである．

11 次元の理論と直接の関係を持っているのは，IIB の T-デュアルをとった IIA 型理論であるから，I 型理論も T-デュアルをとったものを考える方が便利なこともある．これを IA（または I′）型理論という．これは以上説明したことから IIA 型理論の orientifold になっているはずである．

最後にヘテロ型理論と I 型理論は M 理論を介して考える．いま M 理論を $S^1 \times S^1/Z_2$ にコンパクト化したとする．この理論には 2 通りの見方がある．(1) まず M 理論が S^1 にコンパクト化した IIA 型理論が，さらに S^1/Z_2 にコンパクト化したと考える．この場合理論は上に述べたように，$SO(32)$ IA 型理論と思われる．(2) 次は M 理論が S^1/Z_2 にコンパクト化して $E_8 \times E_8$ ヘテロ型理論となり，それが S^1 にコンパクト化したと考える．これらの (1) と (2) は同じ理論になっていると期待されそうだが，このままではゲージ群が明らかに違うので，そう単純ではない．この困難は，上に説明した Wilson line によるゲージ群の破れを用いて，$E_8 \times E_8$ ヘテロ型理論を $SO(32)$ の理論に変換することによって除かれる．すなわち双方の T-デュアルをとれば，$SO(32)$ I 型理論とヘテロ型理論が同じものであることがわかる．

以上を弦の結合定数なども含めてまとめると，次のようになる．M 理論を $S^1 \times S^1/Z_2$ にコンパクト化する．IA 型理論のなかにある開いた弦は，11 次元の時空の S^1 に巻き付いた 9 次元的境界の間に張った面ブレインと考えてよい．これを 1 次元なくすと開いた弦とみなせるからである．これらの境界の間の距離を L，円周の長さを R とすれば，この円筒にコンパクト化した M 理論の $R \to 0$ の極限は，上の (1) の見方で IA 型の理論と考えられる（図 2 参照）．この端の円周上には $SO(16)$ の対称性が乗っている．

次に L を一定にしたまま，R を大きくすることを考える．L が小さいときは，この円筒は 10 次元で $SO(16) \times SO(16)$ の対称性を持った 1 つの閉じた弦のように見える．これは上の (2) の場合で，$E_8 \times E_8$ の対称性が $SO(16) \times SO(16)$ に破れて

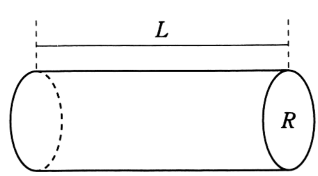


図 2　$S^1 \times S^1/Z_2$

*10) $\oint$ は円周に沿った線積分を表す．ストークスの定理により

$$\oint_{\partial S} A = \int_S F$$

（F は場の強さ，S はある領域，∂S はその境界）

は円周内 S を貫く磁束になる．

いるヘテロ型超弦の M 理論による記述であると考えられる．R を大きくすれば，コンパクト化していない $E_8 \times E_8$ のヘテロ型理論になる．II 型理論と同様の議論により，弦の結合定数は $g_s = L^{3/2}$ となることがわかり，再び 11 次元の存在は摂動論では見えないことがわかる．

このヘテロ型理論で，再び R を小さくしていくことを考えると，T-デュアルをとった記述のほうがいいことになり，半径 $1/R$ にコンパクト化して $SO(32)$ が $SO(16) \times SO(16)$ に破れているヘテロ型理論となる．この理論の結合定数は $g_s^{\text{het}} = L/R$ となっているが，L にくらべて R がまだ大きければ，これは小さい．しかしさらに R を小さくしていけばやがて結合定数は大きくなってしまうので，デュアルな理論に移った記述の方がよいことになる．それは I 型の理論であると期待され，その結合定数は $g_s^{\text{I}} = R/L$ となる．

この $SO(32)$ ヘテロ型理論と $SO(32)$ I 型理論の関係は，次のようにも理解できる．問題は理論が強結合にいったときに余分に質量のない状態が現れるかどうかである．いまの理論には中心荷量がないので，質量を持つ状態が小さい表現になる可能性はないが，実はいまの理論に存在する超対称性は，II 型理論の半分である（$N = 1$）．それで質量を持つ状態もスピン 2 までしかないが，もしこのような状態の質量が 0 になるとすると，それは余分の次元からコンパクト化したという解釈を与えるであろう．しかしその場合，11 次元の超対称性は 10 次元の超対称性の 2 倍の大きさを持っているので，この解釈はうまくいかない．もっともありそうな可能性は，このようなことは起こらなくて，再び 10 次元の超弦理論になることである．低エネルギー有効理論でこれを比較してみると，ちょうど $SO(32)$ 対称性を持ったヘテロ型理論の強結合が I 型理論になっているという対応があることが確かめられるのである．

ここで一つ注意しておかなければならないのは，IA 型理論に含まれる開いた超弦である．この理論は I 型理論の T-デュアルをとったものである．ふつうの I 型理論では開いた弦の端は微分が 0 であるという Neumann 型の境界条件を満たすように作られており，これはこの境界からエネルギーや運動量が漏れ出さないという条件で決まっている．ところが，T-デュアルの操作ではこの境界条件が微分ではなく，場の値そのものが一定値になるという Dirichlet 条件に変わる．このことは，この弦のスペクトルが変化するだけでなく，この境界からエネルギーなどが漏れ出すことも意味し，この弦の端は何かの物体にひっついて，エネルギーが保存するようになっていなければならない．（だからこそ位置がどこかに固定される．）これらの物体は D-ブレインと呼ばれている．そしてこれらは，超対称性をちょうど半分破る BPS 非摂動的ソリトン解になっており，超弦理論の摂動論ではみえない RR 荷量を持つ状態であることが知られている．さらに静止しているこれらブレインの間には，超対称性のためにうち消しあって，力が働かないことも知られている．

このようにして，知られているすべての矛盾のない理論はすべて関係していて，11 次元の M 理論を通して理解できることが明らかになった．これを図示すると図 3 のようになる．

問題は，ではこの 11 次元の M 理論自身は一体何なのか，あるいはどのように定式化されるのかということである．これについては現在までのところ完全な解答は与えられていない．以下ではこ

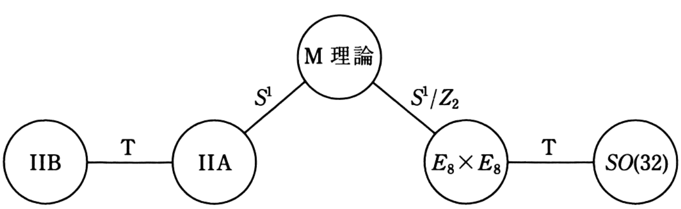


図 3　M 理論と超弦理論

れに対して，最も有望と考えられている行列理論を簡単に紹介したい．

5. D-ブレインの有効理論と行列理論

p 次元の D-ブレインを Dp-ブレインと呼ぶ．これが 1 つあるとき，このブレインの世界体積上で実現されている理論は何であろう？ Dp-ブレインには開いた弦がつながり得るので，その励起モードを調べることにより，Dp-ブレイン上にはゲージ場の自由度が存在することがわかる．Dp-ブレインが 1 つしかないときは，$U(1)$ ゲージ理論（電磁気と同じ）である．また理論はもともと 10 次元で定義されているので，これは 10 次元の超対称 $U(1)$ ゲージ理論を $p+1$ 次元へ次元を落としたものになっている*11)．

Dp-ブレインがもっとたくさん，n 個あるとどうなるだろう？ もちろんこのとき，それぞれの世界体積上に $U(1)$ ゲージ理論があるわけだが，それ以外にこれらをつなぐ開いた弦から，物質場が出てくる．Dp-ブレインが離れている場合は，これらは重いので有効理論では無視してかまわないが，Dp-ブレインが重なったときにはこれらも質量を持たないので無視できなくなる．これらの場の量子数を調べてみると，ちょうど $n \times n$ の行列を作って，$U(n)$ にぴったり一致することがわかる．つまり Dp-ブレインが n 枚重なったときは $U(n)$ ゲージ理論が実現しており，それらが離れると，ちょうど対角の部分にある（Cartan 部分代数に相当する）$U(1)$ のゲージ理論の直積に破れるのである．まとめると，有効理論は 10 次元超対称 $U(N)$ ゲージ理論を $p+1$ 次元へ落としたものである．

この対称性の破れは，この行列の対角成分が異なる期待値を持つことにより実現される．このことはまた，これらの対角成分がブレインの位置を表していることを示唆する．この意味でこれらの行列は通常の座標を一般化したもので，それらが非可換であることは，時空に非可換性が現れることを示唆しているようで興味深い．量子重力の困難の一つは，時空の揺らぎがあまりに大きいためコントロールできなくなるところにあるが，時空がこのような非可換性を持っているとすれば，量子力学の不確定性関係と同じように，時空の座標に最小の単位があるということが導かれ，この困難が解決する可能性が出てくると考えられるからである．

超弦理論を非摂動的に定義するにはどうしたらいいであろうか？ これについて現在決定的な解答は得られていない．一つの示唆として，弦を何か細かい小片（bit）からできていて，その束縛状態とみなすという考え方がある．light-cone ゲージでの弦理論はコンパクトな空間の方向に無限大の大きさでブーストした（これを IMF と呼ぶ）粒子の理論とみなすことができる．その粒子は縦方向の運動量の許される値の最小単位を持っている．このことは摂動論的超弦理論では，縦方向運動量が弦の長さにとれるということと整合している．このようにして，何か理論の中に基本的に許される縦運動量の最小単位があって，それを持つ基本的な自由度によって理論が書かれると予想するのは，あながち無理ではない．

そこで問題はそのような自由度は何なのかということである．このような物からなる物体の散乱を考えたとき，低エネルギーでこれがよい近似で局所場の理論で記述できるとすると，散乱振幅は低エネルギーで 0 にならなければならない．これが可能になっているのは，前節の終わりに述べた定常的な BPS 状態の間には力が働かないという事実による．このことは，何らかの BPS 状態がそのような基本単位を与えることを示唆する．また束縛状態として，弦やブレインなどの色々な物を作る単位としては，粒子的なものがよいと期待される．

そこで D0-ブレインを考えるとどうなるであろうか？ D0-ブレインは BPS 状態である．これは 11 次元の KK モードであり，それらの N 個の束

*11) 次元を落とすことにより，余分の次元に足を持ったゲージ場は，時空の足を持たない物質場とみなせる．

縛状態を考えると，再び超対称性の表現から 11 次元の超重力が円周にコンパクト化した場合と同じスペクトル，特に重力子を含んでいることが期待される．

もし IIA 型理論と M 理論が既に述べたような関係にあるとすると，10 番目の空間次元の運動量は RR 荷量を与え，D0-ブレインとその束縛状態だけがそれを持っている．また D0-ブレインは基本単位の縦運動量を持っている．一般には反 D0-ブレインも存在するはずであるが，IMF に移ればこのような自由度は消えてしまい，理論は D0-ブレインだけで記述できることになる．IMF に移ることは，運んでいる基本単位の縦運動量を大きくすることになるから，N 個の D0-ブレインを考えて，$N \to \infty$ の極限をとることでできる．

これらの事実を総合して，結局 M 理論として D0-ブレインを用いた記述が提唱されている．その有効理論は，本節の前半に述べたように 10 次元 $U(N)$ ゲージ理論を $0+1$ 次元に落としたものである．この理論から出発して色々な整合性の検証がこの 2 年ほどの間に精力的にやられてきた．まず 2-ブレインなどが存在すること，散乱振幅を計算した結果が 11 次元超重力から得られるものと同じであることなどが確かめられている．一時この点に関して重大な疑義が投げかけられたが，最近その基になった計算の誤りが指摘され，正しい計算の結果は超重力と一致することが確認されている．まだコンパクト化したときに少し問題が残されているようであるが，現在まで調べられているところでは，この理論の予言は超重力と一致しており，よい理論になっているようである．これらの詳しい結果について述べることは，紙数もつきたし，次節に述べる理由でも現時点では適当でないと思われる．

6. 終わりに

以上我々は，弦理論のデュアリティーと，それらを統一する M 理論というものがどのような考え方で出てきて，どのような方向を目指しているかを見てきた．振り返ってみると，超弦理論は非摂動的な観点からみれば，決して弦の理論ではなくて，摂動論的には見えていない自由度をたくさん含んでいて，そのこと自体がこれらの理論がデュアリティーという標語で関係付く原因になっていることがわかる．この意味で超弦理論は決して「超弦理論」ではない．むしろ色々な拡がった物体の総称であり，それらが一定の基本的な原理で結びついているのである．

我々はこの観点でこれらを統一する M 理論の一つの提案についても述べた．しかし上記のような考え方をすれば，D0-ブレインだけを使って理論を書くのが本当に正しいのだろうかという気がする．どの拡がった物体も，一定の規則で結び付くのであるから，別の自由度を使って理論を書くことも同等によいはずである．M 理論の本当に正しい記述には，このような拡がった物体の間の「民主主義」を自然に取り入れた定式化が必要ではないかと思われる．また時空の非可換性ということが，本当に物理的な意味を持って現れてくるのかについても，より根本的な理解が必要だと思われる．

このような定式化ができたときには，現在のところ謎である，弦理論とは何であるか，それを支配している基本原理は何であるかという問いに答えられることになるだろう．いままでの素粒子論，いや物理の発展の歴史を考えてみると，我々の前途にはまだまだ多くのすばらしい驚きが残されていると思われる．若い世代がこのぞくぞくするような謎の世界に少しでも興味を持って，新しい驚きを発見してくれることを期待して筆をおきたい．

より詳しいことは以下の文献とその参考文献を見られたい．

参考文献

1) E. Witten, *Nucl. Phys.* **B443** (1995) 85.
2) P.K. Townsend, Four Lectures on M-Theory (1996), hep-th/9612121.
3) T. Banks, Matrix Theory (1997), hep-th/9710231.

（おおた・のぶよし，大阪大学大学院理学研究科）

別冊・数理科学『場の理論』

1999 年 4 月 10 日発行

発行人 森 平 勇 三

数 理 科 学 編 集 部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

企画・編集スタッフ 平 勢 耕 介・田 島 伸 彦
中 山 幸 絵・竹 田 直

ホームページ http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社** TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25 振替 00170–7–2387 (03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本 三美印刷株式会社 山岡景仁